طريقة تهجينية لقطع المستويات مع طريقة التفرعات في مسائل البرمجة الصحيحة

رسالة مقدمة

إلى

مجلس كلية علوم الحاسبات والرياضيات في جامعة الموصل

وهي جزء من متطلبات نيل شهادة الماجستير في علوم الرياضيات

من قبل الطالب

نوّار نجم عبد الله فتوحي

بإشراف

الأستاذ الدكتور عباس يونس البياتي

٢٠٠٥م ١٤٢٦هـ

شكر و ثناء

بعد الحمد والشكر لله، يطيب لي بعد أن انتهيت من إعداد بحثي بأن أتقدم بجزيل الشكر ووافر امتناني إلى أستاذي الفاضل الدكتور عباس يونس البياتي الذي مَدَّ لي يد العون لتخطي صعوبات البحث ومشاقه فقد كان له الأثر الحميد في إنجاز هذا البحث لما بذله من جهد في تقديم الرأي السديد والتوجيه القيم والمتابعة الصادقة وفّقه الله في مسيرته العلمية والعملية.

ومن واجب الوفاء والعرفان أن أسجل شكري وثنائي إلى رئاسة قسم الرياضيات في كلية علوم الحاسبات والرياضيات في جامعة الموصل.

ولزاماً عليّ أن أعترف بفضل جميع أساتذتي في الدراسات الأولية والعليا في قسم الرياضيات لفضلهم الكبير في إنشاء معلوماتي وتطويرها وأشكر زملائي طلبة الدراسات العليا في القسم.

وأخيرا أرجو من الله عز وجل أن يجعل هذا البحث محققاً للهدف الذي أصبو إليه والنتيجة المرجوة من جرائه.

والله ولي التوفيق

نوّار نجم عبد الله

قائمة المحتويات

قائمة المصطلحات

Basic variables	المتغيرات الأساسية
Binary Integer Programming Problem (BIPP)	مسألة البرمجة الصحيحة الثنائية
Branch and Bound method (B.B.)	طريقة التفرعات والعقد
Branching variable	المتغير المتفرع
Constraints set	مجموعة القيود
Cutting Planes method (C.P.)	طريقة قطع المستويات
Cut and Branch method (C.B.)	طريقة القطع والتفرع
Cut and Branch and Cut method (C.B.C.)	طريقة القطع والتفرع والقطع
Decision variables	متغيرات القرار
Dynamic Programming Problem (DPP)	مسألة البرمجة الداينماكية
Feasible region	المنطقة الممكنة
Feasible solution	الحل الممكن
Infeasible solution	الحل غير الممكن
Integer Programming Problem (IPP)	مسألة البرمجة الصحيحة
Integer Linear Programming Problem (ILPP)	مسألة البرمجة الخطية الصحيحة
Integer Nonlinear Programming Problem (INLPP)	مسألة البرمجة اللاخطية الصحيحة
Linear Programming Relaxation	البرمجة الخطية المتراخية

Linear Programming Problem (LPP)	مسألة البرمجة الخطية
Mathematical Programming Problem (MPP)	مسألة البرمجة الرياضية
Mixed Integer Programming Problem (MIPP)	مسألة البرمجة الصحيحة المختلطة
Objective function	دالة الهدف
Optimal solution	الحل الأمثل
Pure Integer Programming Problem (PIPP)	مسألة البرمجة الصحيحة المطلقة
Simplex method	طريقة سمبلكس
Tree search	شجرة البحث (الحل)

الخلاصة:

تتناول هذه الرسالة طريقة جديدة في حل مسائل البرمجة الخطية الصحيحة بالاعتماد على طرق سابقة في حل هذه المسائل منها طريقة التفرعات والعقد وطريقة قطع المستويات المعروفتين حيث تم في هذه الطريقة الجديدة ربط ما بين تلك الطريقتين وسميناها بطريقة القطع والتفرع.

الأسباب التي أدت إلى الربط ما بين طريقة قطع المستويات وطريقة التفرعات والعقد هي للتغلب على المساوئ من كلا الطريقتين وخاصة عدد التكرارات الكبير والوقت المستغرق الكثير في الحل والحصول على نتائج تقع ما بين نتائج كل من تلك الطريقتين حيث أخذت طريقة القطع والتفرع الصفات الجيدة وجزء بسيط من الصفات السيئة من كلا الطريقتين.

تتناول هذه الرسالة أيضا حل أحد مسائل البرمجة الخطية الصحيحة بوساطة طريقة التفرعات والعقد وطريقة قطع المستويات والطريقة الجديدة كما قمنا بعمل برامجيات خاصة على الحاسبة لحل عشرة مسائل من البرمجة الخطية الصحيحة بهذه الطرق فحصلنا على نتائج جيدة ومرضية وبذلك أصبحت الطريقة الجديدة طريقة القطع والتفرع عملية جدا في حل مسائل البرمجة الخطية الصحيحة.

عملية الربط التي قمنا بها في هذه الرسالة فتحت مجالا جيدا وواسعا في حل مسائل البرمجة الخطية الصحيحة وإيجاد أفضل الحلول لها حيث قمنا بعملية الربط مرة أخرى ما بين الطريقة الجديدة (القطع والتفرع) وطريقة قطع المستويات فحصلنا على طريقة هجينه أخرى ذات نتائج وحلول جيدة جدا.

[1-1] تمهيد:

مسألة البرمجة الصحيحة Integer Programming Problem هي إحدى أفرع البرمجة الرياضية (Mathematical Programming(MP حيث أن البرمجة الرياضية تهتم في تحديد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة تتكون من عدة متغيرات وتحقق عدداً من القيود (معادلات أو متراجحات عادة) والتي يمكن تمثيلها بالشكل:

$$\text{MP: max (min) } f(x);\ x \in S \subseteq R^n$$

حيث أن المجموعة S تسمى بمجموعة القيود (Constraints set) و f تسمى دالة الهدف(Objective function) وكل $x \in S$ تسمى بالحل الممكن (Feasible solution) للبرمجة الرياضية. إذا كان هناك $x^* \in S$ تحقق ($f(x) < f(x^*) < \infty$) للدالة العظمى و ($- \infty < f(x^*) < f(x)$) للدالة الصغرى لكل $x \in S$ فأن x^* تسمى بالحل الأمثل (Optimal solution) لمسألة البرمجة الرياضية.

مسألة البرمجة الخطية(Linear Programming Problem (LPP هي حالة خاصة من البرمجة الرياضية مع الدالة $f(x)$ تكون دالة خطية و S تكون مجموعة من المتغيرات x تحقق منظومة من المعادلات الخطية $Ax = b$ و $x \geq 0$، لذلك مسألة البرمجة الصحيحة هي مسألة البرمجة الرياضية بحيث $S \subseteq Z^n \subseteq R^n$ وإن Z^n هي مجموعة من المتجهات الصحيحة ذات البعد n (أي ان كل متغيرات x مقصورة على أن تكون ذات قيم صحيحة).[7]

مسألة البرمجة الصحيحة Integer Programming Problem تكتب للاختصار (IPP) بدأت في 1958 من قبل العالم (Ralph E. Gomory) وهي مسألة أمثلية لتكبير أو لتصغير قيمة دالة مع متغيرات القرار(Decision variables) تحقق مجموعة من المتراجحات.[4]

يوجد هنالك نوعان أساسيان من مسألة البرمجة الصحيحة وهما:

1-مسألة البرمجة الخطية الصحيحة Integer Linear Programming Problem (ILPP)

2-مسألة البرمجة اللاخطية الصحيحة Integer Nonlinear Programming Problem (INLPP)

والفرق في ما بينهما هو خطية و لا خطية دالة الهدف.

[1-2] **مسألة البرمجة الخطية الصحيحة** Integer Linear Programming Problem :(ILPP)

مسألة البرمجة الخطية الصحيحة هي مسألة البرمجة الخطية بحيث تكون جميع أو بعض متغيرات القرار مقيدة لتكون ذات قيمة صحيحة ، و هناك ثلاثة أنواع من مسألة البرمجة الخطية الصحيحة:

1-مسألة البرمجة الخطية الصحيحة المطلقة Pure Integer Programming Problem (PIPP)

وهي المسألة التي تكون فيها جميع متغيرات القرار ذات قيمة صحيحة.

2–مسألة البرمجة الخطية الصحيحة المختلطة Mixed Integer Programming Problem (MIPP)

وهي المسألة التي تكون فيها بعض متغيرات القرار ذات قيمة صحيحة و بعضها الآخر ذات قيمة غير صحيحة.

3–مسألة البرمجة الخطية الصحيحة الثنائية Binary Integer Programming Problem (BIPP)

وهي المسألة التي تكون فيها جميع متغيرات القرار ذات قيمة صفر أو واحد. [14]

في أكثر الأحيان يصادف عند حساب مسألة البرمجة الخطية تطلب فيها المتغيرات قيمة صحيحة مثال على ذلك: عندما يقرر أحد المصانع على عدد المعامل المراد إنشاؤها أو عندما تقرر شركة خطوط النقل الجوي على عدد الطائرات المراد شراؤها الجواب يجب أن يكون صحيحاً هكذا هي مسألة البرمجة الصحيحة.

بدقة أكثر (min,max) مسألة البرمجة الصحيحة هي مسألة (تكبير، تصغير) دالة خطية (دالة الهدف) تابعة لمتغيرات ذات قيمة صحيحة و تحقق منظومة من المعادلات (المتراجحات) الخطية، بشكل عام مسألة البرمجة الصحيحة هي أكثر صعوبة في الحل من مسألة البرمجة الخطية لأنه يمكننا حل مسألة البرمجة الصحيحة بحل متتابعة من مسائل البرمجة الخطية.

في مسألة البرمجة الصحيحة سوف نسمي أية قيمة صحيحة من المتغيرات التي تحقق منظومة من المتراجحات بالحل الممكن(Feasible solution) و يمكننا أن نسمي مجموعة الحلول الممكنة بالمنطقة الممكنة R (Feasible region R) لمسألة البرمجة

الصحيحة، لذلك max(min) مسألة البرمجة الصحيحة هي مسألة إيجاد الحل الممكن حيث تكون دالة الهدف أكبر (أصغر) أو تساوي قيمة كل الحلول الممكنة الأخرى الموجودة، فيسمى ذلك الحل بالحل الأمثل(Optimal solution).

مسألة البرمجة الخطية الصحيحة تحل أولا بتجاهل شروط المتغيرات بأخذ قيم صحيحة، ثم تحل المسألة على أنها مسألة برمجة خطية لإيجاد الحل الحقيقي الأمثل ، بعد ذلك تستخدم خوارزميات مسألة البرمجة الصحيحة للتحرك من الحل الحقيقي باتجاه إيجاد الحلول الممكنة الصحيحة أي الحلول التي تكون فيها كل المتغيرات صحيحة، خوارزميات البرمجة الصحيحة تحاول إيجاد الحل الممكن الصحيح وبعد ذلك تبحث لحل أخر أفضل (سوف نأتي باستعراض هذه الخوارزميات في الفصول القادمة) وهذا يؤدي إلى نشوء شجرة البحث(Tree search) والتي تكون فقط عندما يكون البحث عن الحل يكتمل والتي تساعدنا على معرفة ان الحل الممكن الأفضل الذي وجد هو الحل الأمثل الأعظم.

في إيجاد الطرائق (الخوارزميات) للحصول على الحلول الصحيحة نجد أن المسافة التي لدينا للتحرك من الحل الأمثل الخطي للوصول إلى الحلول الصحيحة قليلة والأكثر حظا هو ان مسألة البرمجة الصحيحة سوف تكون طريقة مناسبة لإيجاد أفضل و أحسن حل ممكن.[4]

هناك العديد من الفوارق ما بين مسالة البرمجة الخطية الصحيحة ومسألة البرمجة الخطية:

1-مسألة البرمجة الخطية الصحيحة هي أكثر قوة من مسألة البرمجة الخطية، في الحقيقة يمكن القول أن مسألة البرمجة الصحيحة هي مسألة البرمجة الخطية عند عدم وجود شروط صحيحة على المتغيرات.

2-مسائل البرمجة الخطية الصحيحة هي أكثر صعوبة من مسائل البرمجة الخطية لأنه كما قلنا تتطلب حل عدة مسائل برمجة خطية لحل مسألة برمجة صحيحة واحدة.[17]

[1-3] تعقيدات مسألة البرمجة الخطية الصحيحة:

1- قد يبدو ان مسائل البرمجة الصحيحة اكثر سهولة في الحل من مسائل البرمجة الخطية ظاهريا وليس ذلك مطرداً. على سبيل المثال،مسألة البرمجة الخطية عادة لها عدد غير منته من الحلول حتى لأصغر المناطق الممكنة بينما لمسائل البرمجة الصحيحة تكون منطقة الحل الممكن لها عدد منته محسوب من الحلول (مهما كان كبيراً).

2- إيجاد الحل الأمثل لمسائل البرمجة الصحيحة حيث يكون صعباً جدا.

3-عدد الحلول لمسألة البرمجة الصحيحة يزيد بشكل سريع جدا كلما قمنا بزيادة عدد المتغيرات ذات القيمة الصحيحة في المسألة.

4-التركيب لهذين العاملين (2 و3) يساعدنا على البحث في حلول جيدة و فعالة.

[1-4] بعض التطبيقات على مسألة البرمجة الخطية الصحيحة:

1–*مسألة رأس المال Capital budgeting problem*.

2–*مسألة الشحنة الثابتة Fixed charge problem*.

3–*مسألة العمل المتتابع Job sequencing problem*.

4–*مسألة البائع المتجول Traveling salesman problem*.

5–*مسألة الحقيبة الظهرية Knapsack problem*.

مسألة الحقيبة الظهرية تهتم في ملئ هذه الحقيبة بـ n من الأشياء، هذه الأشياء لها أحجام v_i و أوزان w_i لكل $i=1,2,\ldots,n$، علما أن الوزن الكلي الممكن للحقيبة هو W ،وهذه المسألة هي تعظيم حجم هذه الأشياء المراد خزنها والصيغة الرياضية لها هي:

$$\text{Max } z=\sum_{i=1}^{n} v_i x_i$$

$$\text{Subject to } \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le W\ ,\ x_i \in \{0,1\}, \forall i$$

صيغة مسائل الحياة الحقيقية (Real life problems)على شكل مسألة برمجة صحيحة و ثنائية تكون معروفة جدا، ذلك لسبب واحد انه مسألة البرمجة الصحيحة و الثنائية تظهر بشكل حدسي بإمكانية تمثيلها بشكل بسيط، على أية حال بسبب تعقد إيجاد الحل الأمثل لذلك علينا اللجوء إلى طرائق تقريبية أخرى كالحل بمسألة البرمجة الخطية قبل تمثيل المسألة على شكل مسألة برمجة صحيحة أو ثنائية.

[1-5] **بعض الطرائق في حل مسألة البرمجة الخطية الصحيحة:**

1–طريقة البرمجة الخطية المتراخية LP relaxation.

2–طريقة التفرعات و العقد Branch and Bound method (B.B.).

3–طريقة قطع المستويات Cutting Planes method (C.P.).

ملاحظة: الطريقتان (التفرعات والعقد) و (قطع المستويات) سيتم شرحهما في الفصول القادمة.

[1-6] **طريقة البرمجة الخطية المتراخية** Linear Programming Relaxation (LP relaxation):

وهي طريقة تقاربية تتكون من تجاهل بعض او كل القيود الصحيحة و حل المسألة على إنها مسألة برمجة خطية وبعد ذلك يتم قطع الجزء الحقيقي من الحلول غير الصحيحة للحصول على حلول صحيحة.

إيجابيات الطريقة:

*يتم الحصول على الحل لمسألة البرمجة الصحيحة بشكل سريع.

سلبيات الطريقة:

*الحلول التي نحصل عليها ربما تكون غير موجبة وتبقى غير مثلى.

*قيمة الحل الأمثل الذي نحصل عليه ربما يكون بعيداً عن الحل الأمثل لمسألة البرمجة الصحيحة.

*حتى إذا كانت الحلول المثلى للمتغيرات ذوات قيم صحيحة ربما تكون غير مغلقة للحل الأمثل الصحيح لمسألة البرمجة الصحيحة.[14]

[1-7] مسألة البرمجة اللاخطية الصحيحة Integer Nonlinear Programming Problem (INLPP):

النوع الثاني من مسألة البرمجة الصحيحة هو مسألة البرمجة اللاخطية الصحيحة التي تكون فيها دالة الهدف دالة غير خطية ، سوف ندرس هذا النوع و التقنيات المستخدمة في حله.

هنالك عدة تقنيات لحل مسألة البرمجة اللاخطية الصحيحة منها طريقة التفرعات و العقد و غيرها و لكن الطريقة الأكثر قوة و كفاءة هي مسألة البرمجة الداينماكية Dynamic Programming Problem (DPP) .

[1-8] مسألة البرمجة الداينماكية Dynamic Programming Problem (DPP)

مسألة البرمجة الداينماكية هي مسألة تقريبية علمية لإيجاد الحل لبعض الأنواع من مسائل الأمثلية كمسألة البرمجة الصحيحة ،الذي نعني به إيجاد الحل الأفضل للدالة غير الخطية في مسألة البرمجة اللاخطية الصحيحة.

البرمجة الداينماكية تعمل على حل نوعين من مسائل البرمجة اللاخطية الصحيحة:

1-مسائل ذات بعد واحد.

2-مسائل متعددة الأبعاد.

[1-9] مسائل البرمجة الداينماكية ذات البعد الواحد لحل المسائل اللاخطية:

لتكن لدينا المسألة الآتية:

$$\text{Max } z=\sum_j \Phi_j(x_j)$$

$$\text{Subject to } \sum_j h_j(x_j) \le b,\ x_j \ge 0 \text{ integers } (j=1,2,\ldots\ldots,n)$$

لحل هذه المسألة اعتبر :

$s=1,2,\ldots\ldots,n$, $\lambda_s=1,2,\ldots\ldots,b$, when n is the number of the variables.

$$\lambda_s - h_s(\xi s)=0 \Rightarrow \lambda_s = h_s(\xi s)$$

$$g_1(\lambda_1)= \underset{0 \le x_1 \le \xi_1}{\text{Max}}\ \Phi_1(x_1) \text{ for s =1}$$

$$g_s(\lambda_s)=\underset{0 \le xs \le \xi s}{\text{Max}}\ [\Phi_s(x_s)+g_{s-1}(\lambda_s - h_s(x_s))],\ s=2,\ldots\ldots,n$$

[1-10] مسائل البرمجة الداينماكية متعددة الأبعاد لحل المسائل اللاخطية:

لتكن لدينا المسألة الآتية:

$$\text{Max } z=\sum_j \Phi_j(x_j)$$

$$\text{Subject to } \sum_j h_{1j}(x_j) \le b_1$$

$$\sum_j h_{2j}(x_j) \le b_2,\ x_j \ge 0 \text{ integers } (j=1,2,\ldots\ldots,n)$$

لحل هذه المسألة اعتبر :

$s=1,2,\ldots\ldots,n$, $\lambda_{1s}=1,2,\ldots.b_1$

$\lambda_{2s}=1,2,\ldots b_2$, when n is the number of the variables.

λ_{1s} - $h_{1s}(\xi_{1s})$=0, λ_{2s} - $h_{2s}(\xi_{2s})$=0

ξ_s =min(ξ_{1s}, ξ_{2s})

$$g_1(\lambda_{11},\lambda_{21})=\underset{0 \le x_s \le \xi_1}{\max}\ [\Phi_1(x_1)] \text{ for s =1}$$

And for s = 2,3…n

$$g_s(\lambda_{1s},\lambda_{2s})= \underset{0\le x_s \le \xi_s}{\max}\ [\Phi_s(x_s)+g_{s-1}(\lambda_{1s}-h_{1s}(x_s),\lambda_{2s}-h_{2s}(x_s))]$$

[1-11] مثال:حل مسألة البرمجة اللاخطية الصحيحة الآتية:

Max z= $3x_1^2 + 20x_2 + x_2^2 + x_3 + 2x_3^2$

Subject to $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 16$

$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 18$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$,integers

الحل:

s=1,2,3, λ_{1s} =1,2…16, λ_{2s} =1,2…18

First at s =1

$\lambda_{11} - h_{11}(\xi_{11}) = 0 \Rightarrow \lambda_{11} - 2\xi_{11} = 0 \Rightarrow \xi_{11} = \lambda_{11}/2$

$\lambda_{21} - h_{21}(\xi_{21}) = 0 \Rightarrow \lambda_{21} - 4\xi_{21} = 0 \Rightarrow \xi_{21} = \lambda_{21}/4$

$\xi_1 = \min(\xi_{11}, \xi_{21}) = \min(\lambda_{11}/2, \lambda_{21}/4)$

$g_1(\lambda_{11}, \lambda_{21}) = \max_{0 \le x_1 \le \xi_1} [3x_1^2]$, $g_1(2,6) = \max_{0 \le x_1 \le 0} [3x_1^2] = \max[0,3] = 3$

$g_1(6,12) = \max_{0 \le x_1 \le 3} [3x_1^2] = \max[0,3,12,27] = 27$

$g_1(10,16) = \max_{0 \le x_1 \le 4} [3x_1^2] = \max[0,3,12,27,48] = 48$ …………$g_1(16,18) = 48$

الجدول (1-1):

λ_{21} \ λ_{11}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	0	0	0	0	3	3	3	3	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
5	0	0	0	0	3	3	3	3	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
6	0	0	0	0	3	3	3	3	12	12	12	12	27	27	27	27	27	27	27
7	0	0	0	0	3	3	3	3	12	12	12	12	27	27	27	27	27	27	27
8	0	0	0	0	3	3	3	3	12	12	12	12	27	27	27	27	48	48	48
9	0	0	0	0	3	3	3	3	12	12	12	12	27	27	27	27	48	48	48
10	0	0	0	0	3	3	3	3	12	12	12	12	27	27	27	27	48	48	48
11	0	0	0	0	3	3	3	3	12	12	12	12	27	27	27	27	48	48	48
12	0	0	0	0	3	3	3	3	12	12	12	12	27	27	27	27	48	48	48
13	0	0	0	0	3	3	3	3	12	12	12	12	27	27	27	27	48	48	48
14	0	0	0	0	3	3	3	3	12	12	12	12	27	27	27	27	48	48	48
15	0	0	0	0	3	3	3	3	12	12	12	12	27	27	27	27	48	48	48
16	0	0	0	0	3	3	3	3	12	12	12	12	27	27	27	27	48	48	48

Second at s =2

$\lambda_{12} - h_{12}(\xi_{12}) = 0 \Rightarrow \lambda_{12} - 3\,\xi_{12} = 0 \Rightarrow \xi_{12} = \lambda_{12} / 3$

$\lambda_{22} - h_{22}(\xi_{22}) = 0 \Rightarrow \lambda_{22} - 2\xi_{22} = 0 \Rightarrow \xi_{22} = \lambda_{22} / 2$

$\xi_2 = \min(\xi_{12}, \xi_{22}) = \min(\lambda_{12}/3, \lambda_{22}/2)$

$$g_2(\lambda_{12},\lambda_{22}) = \max_{0 \le x_2 \le \xi_2} [20x_2 + x_2^2 + g_1(\lambda_{12} - 3x_2, \lambda_{22} - 2x_2)]$$

$$g_2(6,4) = \max_{0 \le x_2 \le 2} [20x_2 + x_2^2 + g_1(6-3x_2, 4-2x_2)] = \max[0+g_1(6,4),\ 21+g_1(3,2),\ 44+g_1(0,0)] = 44$$

$$g_2(8,8) = \max_{0 \le x_2 \le 2} [20x_2 + x_2^2 + g_1(8-3x_2, 8-2x_2)] = \max[0+g_1(8,8),\ 21+g_1(5,6),\ 44+g_1(2,4)] = 47$$

$$g_2(10,7) = \max_{0 \le x_2 \le 3} [20x_2 + x_2^2 + g_1(10-3x_2, 7-2x_2)] = \max[0+g_1(10,7),\ 21+g_1(5,7),\ 44+g_1(4,3), 69+g_1(1,1)] = 69$$

$$g_2(12,8) = \max_{0 \le x_2 \le 4} [20x_2 + x_2^2 + g_1(12-3x_2, 8-2x_2)] = \max[0+g_1(12,8),\ 21+g_1(9,6),\ 44+g_1(6,4), 69+g_1(3,2),\ 96+g_1(0,0)] = 96$$

$$g_2(15,14) = \max_{0 \le x_2 \le 5} [20x_2 + x_2^2 + g_1(15-3x_2, 14-2x_2)] = \max[0+g_1(15,14),\ 21+g_1(12,12), 44+g_1(9,10),\ 69+g_1(6,8), 96+g_1(3,6), 125+g_1(0,4)] = 125$$

$$g_2(16,18) = \max_{0 \le x_2 \le 5} [20x_2 + x_2^2 + g_1(16-3x_2, 18-2x_2)] = \max[0+g_1(16,18),\ 21+g_1(13,16), 44+g_1(10,14),\ 69+g_1(7,11), 96+g_1(4,10), 125+g_1(1,8)] = 125$$

الجدول (2-1):

λ_{12} \ λ_{22}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	0	0	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21
4	0	0	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21
5	0	0	21	21	21	21	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
6	0	0	21	21	44	44	44	44	44	44	44	44	44	44	44	44	44	44	44
7	0	0	21	21	44	44	44	44	44	44	44	44	44	44	44	44	44	44	44
8	0	0	21	21	44	44	44	44	47	47	47	47	47	47	47	47	48	48	48
9	0	0	21	21	44	44	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69
10	0	0	21	21	44	44	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69
11	0	0	21	21	44	44	69	69	69	69	72	72	72	72	72	72	72	72	72
12	0	0	21	21	44	44	69	69	96	96	96	96	96	96	96	96	96	96	96
13	0	0	21	21	44	44	69	69	96	96	96	96	96	96	96	96	96	96	96
14	0	0	21	21	44	44	69	69	96	96	96	96	99	99	99	99	99	99	99
15	0	0	21	21	44	44	69	69	96	96	125	125	125	125	125	125	125	125	125
16	0	0	21	21	44	44	69	69	96	96	125	125	125	125	125	125	125	125	125

Third at s =3

$\lambda_{13} - h_{13}(\xi_{13}) = 0 \Rightarrow \lambda_{13} - 4\xi_{13} = 0 \Rightarrow \xi_{13} = \lambda_{13} / 4$

$\lambda_{23} - h(\xi_{23}) = 0 \Rightarrow \lambda_{23} - 3\xi_{23} = 0 \Rightarrow \xi_{23} = \lambda_{23} / 3$

$\xi_3 = \min(\xi_{13}, \xi_{23}) = \min(\lambda_{13}/4, \lambda_{23}/3)$

$$g_3(\lambda_{13}, \lambda_{23}) = \max_{0 \le x_3 \le \xi_3} [x_3 + 2x_3^2 + g_2(\lambda_{13} - 4x_3, \lambda_{23} - 3x_3)]$$

$$g_3(16,18) = \max [x_3 + 2x_3^2 + g_2(16 - 4x_3, 18 - 3x_3)] =$$

$$\max_{0 \le x_3 \le 4} [g_2(16,18), 3 + g_2(12,15), 10 + g_2(8,12), 21 + g_2(4,9), 36 + g_2(0,6)] = 125$$

الحل الأمثل للمسألة هو: $x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = 0, Z = 125$

وللمزيد من المعلومات لحل مسائل البرمجة اللاخطية الصحيحة يمكن الرجوع إلى المصدر [3]

[2-1] مقدمة:

طريقة التفرعات و العقد Branch and Bound method (B.B.) هي تقنية عددية منتظمة لحل مسائل البرمجة الصحيحة(IPP) ،هذه الطريقة نشأت من قبل العالمين Land و Doig في عام 1960 و طورت بوساطة العالم Dakin في العام 1965 ،خوارزمية طريقة التفرعات و العقد على مدى تحسيناتها و توسعاتها تنتج مجموعة بناءة و مضمونة من الحلول لمسألة البرمجة الصحيحة.[13]

طريقة التفرعات و العقد تعتمد على ملاحظة حساب الحلول الصحيحة التي لها بنية شجرية و الهدف الرئيس في طريقة التفرعات و العقد هو لتجنب نمو شجرة الحل على قدر المستطاع لان الشجرة ستكون كبيرة في أية مسألة حقيقية ، طريقة التفرعات و العقد بدلا من ان تعمل على نمو الشجرة في مراحل (s tages) يكون فقط على العقد الأكثر ضمانة للحل في أية مرحلة حيث تقوم طريقة التفرعات و العقد على حساب العقد الأكثر ضمانة بتخمين قيد على احسن قيمة لدالة الهدف التي يمكن الحصول عليها من نمو العقد في المراحل الأخيرة .

تسمية طريقة التفرعات و العقد جاءت من (التفرع) الذي يحدث على العقد المختارة لنمو أكثر وتكوين العقد الجديدة(الأبناء) من هذه العقدة و(التقيد) الذي يحصل عند حساب القيد على أفضل قيمة تم الحصول عليها من نمو العقد.[2]

طريقة التفرعات و العقد هي طريقة تقاربية للبحث عن الحل الأمثل في جزء من شجرة البحث. بينما اشتقاق القيود على دالة الهدف يضمن عدم وجود حل امثل على

الأجزاء المقطوعة من شجرة البحث. طريقة التفرعات و العقد مضمونة الحصول على القيمة العظمى(الصغرى) لدالة الهدف مع دقة مطلوبة بعد عدد من الخطوات. [5]

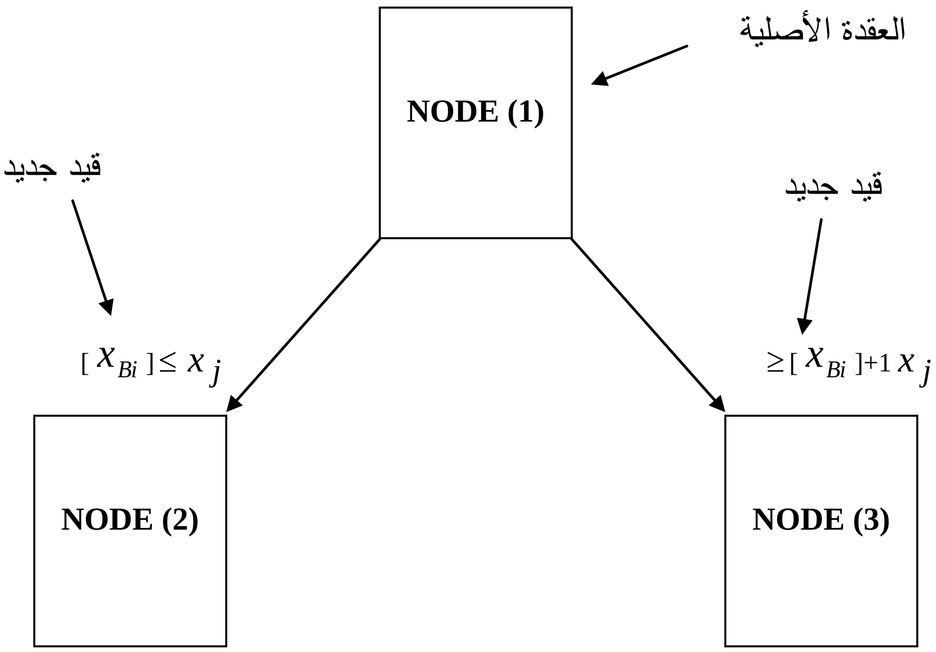
أفضل تمثيل لطريقة التفرعات و العقد بوساطة شجرة البحث المتألفة من (عقد) و (تفرعات) وهي تقنية بحيث تكون فيها العقد مستمرة التكوين بوساطة و ضع قيود عليا و سفلى جديدة على المتغيرات الصحيحة (التي يجب أن تكون قيمتها صحيحة) مؤدية إلى تطوير الشجرة (شجرة البحث).

خوارزمية طريقة التفرعات و العقد تبدأ بحل العقدة الأولى (NODE 1) أي عقدة الحل الناتج من مسألة البرمجة الخطية أولا ثم قيود جديدة تضاف إلى المتغير الصحيح المختار وليكن x والعقد الجديدة المتكونة تُحل و المتغير x يُعرف بالمتغير المتفرع(Branching variable).

طريقة التفرعات و العقد من أنجح الطرائق العلمية في حل أغلب مسائل البرمجة الصحيحة. مبدأ هذه الطريقة هو تجزئة المسألة المعطاة إلى عدد من المسائل الجزئية يسمى بالتفرع . القيد على دالة الهدف يوضع على كل المسائل الجزئية في التفرع.

الحل الصحيح الذي يكون الأفضل من القيد لجميع المجموعات الجزئية من المنطقة الجزئية هو الحل الأمثل الصحيح. طريقة التفرعات و العقد تبدأ بحل المسألة الخطية إذا كان الحل يحقق الشروط الصحيحة فالحل يتوقف و إلا يُختار المتغير الصحيح ذا القيمة الحقيقية و يضاف إليه قيد جديد يُوضع أعلى أو أسفل قيمته ، الشرط الجديد يضاف بعد ذلك إلى المسألة الأصلية و تُحل إذا وجد حل صحيح وعندئذ تتوقف عملية التفرع وإلا

نختار المتغير ذا القيمة الحقيقية ويجزأ (يتفرع) إلى حين الحصول على الحل الأمثل كما موضح في الآتي:



حيث ان x_j هو المتغير المتفرع

$[x_{Bi}]$ هو الجزء الصحيح للمتغير x_j

الشرطان $[x_{Bi}] \leq x_j$ و $\geq [x_{Bi}]+1\, x_j$ يضافان إلى العقدة الأولى ليكونان عقدتين جديدتين NODE 2 و NODE 3 كل منهما مرشحتان لمزيد من التفرع إذا كان حلاهما غير صحيح و أمثل [16] .

وليس هنالك طريقة واحدة هي الأمثل لكل مسألة، فطريقة التفرعات و العقد تتقدم لتصبح الطريقة المثلى في حل مسائل البرمجة الخطية الصحيحة و يمكن تطبيقها على كل أنواعها المطلقة و المختلطة و الثنائية من مسائل البرمجة الصحيحة.

الخطوط العريضة لطريقة التفرعات و العقد هي كالأتي : نجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية وليكن أحد المتغيرات الناتجة هو $x_j = 2.5$ الآن واضح أن الحل الأمثل الصحيح هو إما $x_j \le 2$ أو $x_j \ge 3$ وهذا يعطي كل الاحتمالات الممكنة للقيم الصحيحة للمتغير x_j ثم نحل كل مسألة على جهة من مسائل البرمجة الخطية مع القيود التي تضاف $x_j \le 2$ في حالة و $x_j \ge 3$ في حالة أخرى إذا كان كل من هذه المسائل لها حل أمثل صحيح للمتغيرات الأساسية(Basic variables) فعند ذلك يكون الحل الأمثل الصحيح هو الأعظم (الأصغر) من بين هاتين القيمتين لدالة الهدف.

وعندما لا يكون لأحدى المسائل حل أمثل يحقق القيود الصحيحة تطلب الأمر عدداً أكبر من التكرارات وفي كل مرحلة من هذه التكرارات هنالك قيد أعلى وقيد أسفل لقيمة الحل الصحيح الأمثل.

وفي حالة عدم وجود حل ممكن لبعض التكرارات من المسألة فلا يحتاج التفرع إلى بحث أكثر للحل (وهذه إحدى الوسائل في طريقة التفرعات و العقد للتوقف عن تفرع العقد) [1].

[2-2] **خوارزمية طريقة التفرعات والعقد** [8]:

لتكن مسألة البرمجة الصحيحة هي كالأتي:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Maximize } z=c^T x \\ &\text{Subject to } Ax=b \\ &\qquad x\geq 0 \\ &\qquad x_j,\ j\in I,\ \text{integral} \end{aligned}\right\} \text{—— (2.1)}$$

حيث أن A مصفوفة متكونة من $m\times s$ و b من $m\times 1$ و c من $s\times 1$ و x من $s\times 1$ متجهات.

الخوارزمية:

الخطوة 1:(الحل الابتدائي) أبدأ بحل المسألة المعطاة في (2.1) على أنها مسألة البرمجة الخطية بطريقة سمبلكس(Simplex method) متجاهلا بذلك الشروط (القيود) الصحيحة على المتغيرات. إذا كانت جميع المتغيرات $x_j, j\in I$ لها قيم صحيحة، توقف ، وإلا اذهب إلى الخطوة 2.

الخطوة 2:(تفرع المتغيرات المختارة) اختر من المتغيرات $x_j, j\in I$ المتغير الذي ليس له قيمة صحيحة عند تلك العقدة ، متغير واحد يستخدم لتكوين قيود التفرع ، قاعدة بسيطة في ذلك الاختيار هي اختيار المتغير التي تكون قيمته لها أكبر جزء كسري. المتغيرات المختارة x_j يجب أن تكون متغيرات أساسية وإلا قيمتها ستكون صفراً .

افرض إن المتغير الأساسي المختار هو المتغير i من الجدول الأخير من حل مسألة البرمجة الخطية وتكون قيمته هي x_{Bi} ، حيث نستطيع كتابتها على الشكل التالي $x_{Bi} = [x_{Bi}] + f_i$ حيث $0 < f_i < 1$ و بما أن x_j يجب أن تكون لها قيم صحيحة ، عندئذ تحقق إما :

$x_j \le [x_{Bi}]$ ....(2.2)

أو $x_j \ge [x_{Bi}]+1$ ....(2.3)

الخطوة 3:(صياغة العقد الجديدة) اعمل على تكوين مسألتين جديدتين من مسائل البرمجة الصحيحة متمثلتين بالعقد تحت الوصف في الخطوة 2.

المسألة الأولى متكونة من إضافة القيد (2.2) والمسألة الأخرى متكونة من إضافة القيد(2.3) ، حل كل من هاتين المسألتين على أنهما مسائل البرمجة الخطية مستخدما طريقة سمبلكس.

الخطوة 4:(اختبار العقدة النهائية) كل من العقد المتكونة في الخطوة 3 ربما تكون عقدة نهائية لواحد من السببين الآتيين :

1-المسألة عند تلك العقدة ليس لها حل ممكن واذهب إلى الخطوة 5 .

2- قيم المتغيرات $x_j, j \in I$ جميعها صحيحة، وبذلك قارن قيمة دالة الهدف عند تلك العقدة مع افضل قيمة توصلت أليها ، إذا كانت قيمة دالة الهدف عند العقدة الجديدة افضل فغير قيمة العقدة القديمة بهذه العقدة واذهب إلى الخطوة 5.

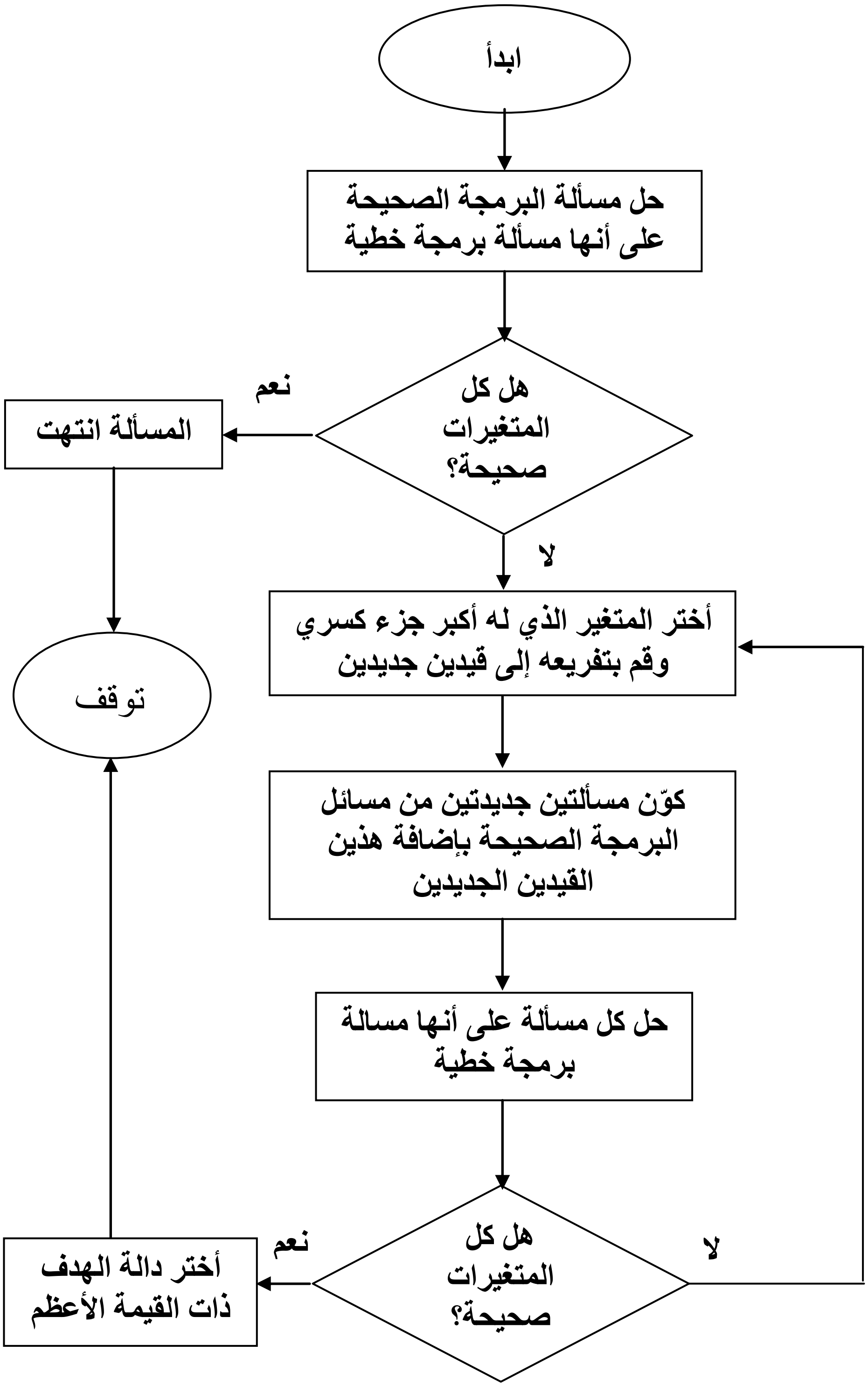
الخطوة 5: (اختيار العقدة)

1-إذا كانت بالضبط عقدة واحدة في الخطوة 4 منتهية ، استخدم العقدة غير المنتهية واذهب إلى الخطوة 2.

2-إذا كانت كل العقد في الخطوة 4 غير منتهية ، اختر العقدة الأكثر ضمانة للوصول إلى الهدف ، وهي العقدة التي تكون عندها دالة الهدف اكبر ما يمكن ،اذهب إلى الخطوة 2.

الصفة السلبية الأساسية لهذه الخوارزمية تكمن في حل مسألة البرمجة الخطية كاملة عند كل عقدة وهذا عند المسائل الكبيرة سيأخذ وقت كبير و عدد تكرارات اكبر[12] .

[2-3] المخطط الانسيابي لطريقة التفرعات و العقد:



[2-4] مثال: حِل مسألة البرمجة الخطية الصحيحة المطلقة التالية بطريقة التفرعات والعقد[8]:

$$\text{Maximize } z=3x_1+4x_2$$
$$\text{Subject to } 2x_1+x_2\le 6$$
$$2x_1+3x_2\le 9$$
$$x_1\ge 0, x_2\ge 0, \text{ integral}$$

الحل:

نقـوم أولا بإضــافة المتغيــرات المنحلــة x_3, x_4 إلــى المســألة أعــلاه كــالأتي $2x_1+x_2+x_3=6$ و $2x_1+3x_2+x_4=9$ والحل على أنها مسألة البرمجة الخطية متجاهلا الشروط الصحيحة على المتغيرين x_1, x_2 كما في الخطوة 1 والحصول على الجدول الأخير من حل البرمجة الخطية الموضح في الجدول (1- 2) ومن هذا الجدول نحصل على الحل الأمثل الحقيقي(غير الصحيح) $x_1=\frac{9}{4}, x_2=\frac{3}{2}, z=\frac{51}{4}$.

سوف نختار المتغير x_2 على أنه المتغير المتفرع لان له أكبر جزء كسري وهو $\frac{1}{2}$ وتكون القيود الجديدة $x_2\le 1$, $x_2\ge 2$ كما في الخطوة 2 .

الجدول (2-1):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	$\frac{9}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{-1}{4}$
x_2	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$
z	$\frac{51}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$

لتحقيق الخطوة 4 سوف نضيف كلاً من هذين القيدين إلى الجدول الأخير من الخطوة 1 الذي هو الجدول (2-1) عن طريق الخطوة 3 ، ونحصل على كل من الجدولين (2-2) و (2-3) ، للجدول (2-2) نكتب $x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$ من السطر الثاني من الجدول (2-1) ونضيف المتغير المنحل δ_1 فيكون القيد الجديد كالآتي:

$x_2 + \delta_1 = 1$ أو $\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \delta_1 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ و بالطريقة نفسها يصبح القيد الجديد للجدول (2-3) $-x_2 + \delta_1 = -2$ أو $-\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \delta_1 = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ كالآتي:

الجدول (2-2):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4 ↓	δ_1
x_1	$\frac{9}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{-1}{4}$	0
x_2	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
z	$\frac{51}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	0
← δ_1	$\frac{-1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	1

الجدول (2-3):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1
x_1	$\frac{9}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{-1}{4}$	0
x_2	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
z	$\frac{51}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	0
δ_1	$\frac{-1}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

الآن نستخدم طريقة سمبلكس على كل من هذين الجدولين (2-2) و(2-3) للحصول على الجدولين الجديدين (2-4) و (2-5) على التوالي. في هذه المرحلة من الحل نحصل على شجرة الحل(شجرة البحث) الموضحة في (الشكل 1-2) .

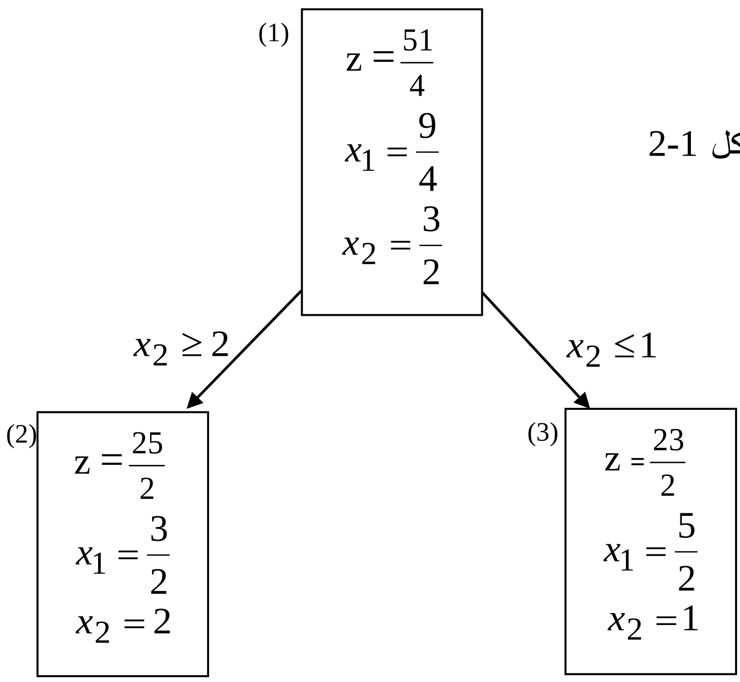
الجدول (2- 4):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1
x_1	$\frac{5}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$
x_2	1	0	1	0	0	1
z	$\frac{23}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
x_4	1	0	0	-1	1	-2

الجدول (2-5):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1
x_1	$\frac{3}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_2	2	0	1	0	0	-1
z	$\frac{25}{2}$	0	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_3	1	0	0	1	-1	-2

نلاحظ ان المتغير x_1 ما زالت قيمته غير صحيحة و بذلك نستمر بالتفرع على هذا المتغير.



الشكل 2-1

من الجدول (2-5) المتمثل بالعقدة (2) نستخرج القيدين الجديدين $x_1 \geq 2, x_1 \leq 1$

لتكوين المسألتين الجديدتين ، و كالسابق سوف نكتب $x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}\delta_1$ من

السطر الأول من الجدول (2-5) وثم إضافة المتغير المنحل δ_2 إلى واحد من هذه القيود

$x_1 \geq 2$ أو $x_1 \leq 1$ ، لنختر هنا القيد $x_1 \leq 1$ لنحصل على $x_1 + \delta_2 = 1$ وعندما

$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}\delta_1$ من الجدول (2-5) سيكون لدينا

$\frac{-1}{2}x_4 - \frac{3}{2}\delta_1 + \delta_2 = 1 - \frac{3}{2} = \frac{-1}{2}$ وبإضافة هذه المعادلة إلى الجدول (2-5)

سنحصل على الجدول (2-6) و كالأتي:

الجدول (2-6):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1 ↓	δ_2
x_1	$\frac{3}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0
x_2	2	0	1	0	0	-1	0
z	$\frac{25}{2}$	0	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_3	1	0	0	1	-1	-2	0
← δ_2	$\frac{-1}{2}$	0	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-3}{2}$	1

وباستخدام طريقة سمبلكس على الجدول أعلاه فنحصل على:

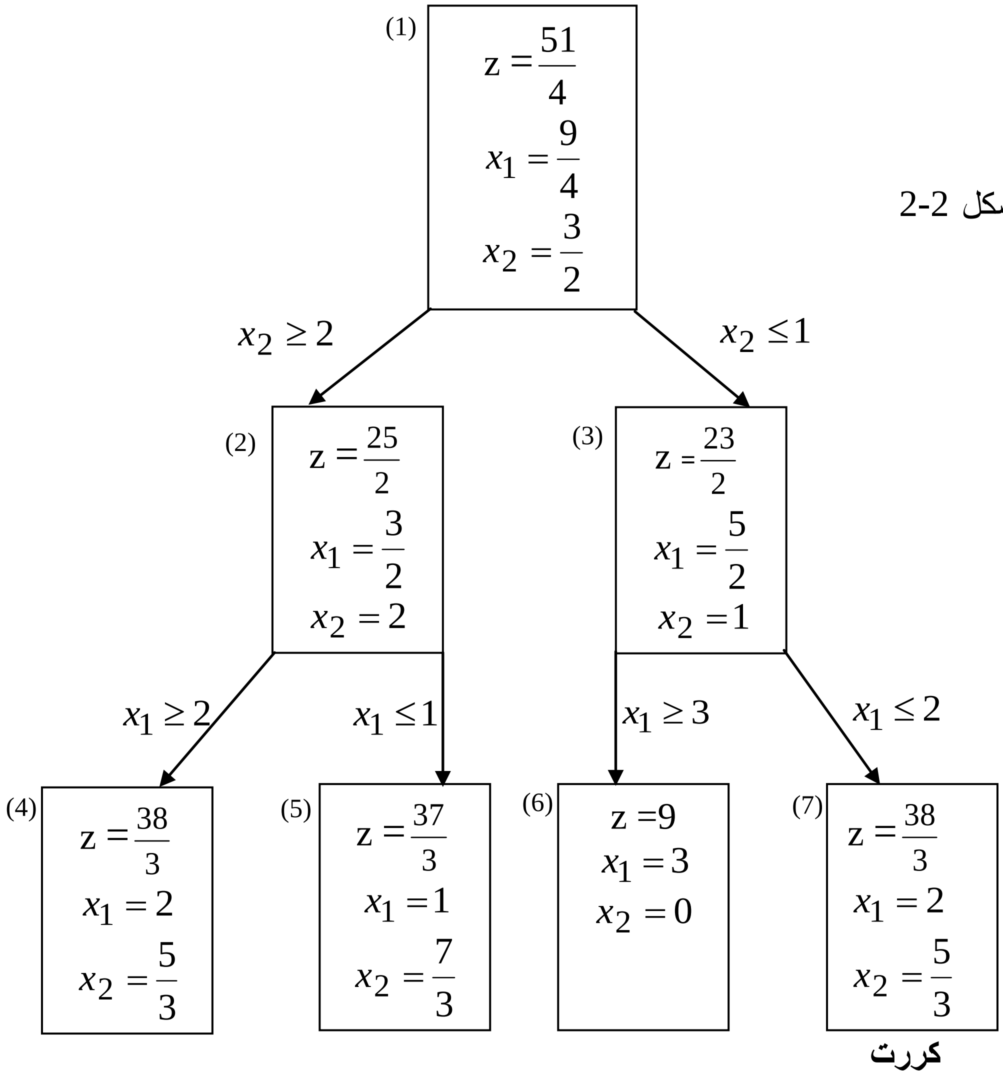
الجدول (2-7):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1	δ_2
x_1	1	1	0	0	0	0	1
x_2	$\frac{7}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$
z	$\frac{37}{3}$	0	0	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
x_3	$\frac{5}{3}$	0	0	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{-4}{3}$
δ_1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{-2}{3}$

نلاحظ أن المتغير x_2 ما زالت قيمته غير صحيحة و بذلك نستمر بالتفرع على هذا المتغير.

وفي هذه المرحلة من الحل نلاحظ تطوراً في شجرة الحل كما في (الشكل 2 - 2) ، الآن باستخدام الخطوة 2 على العقدة (5) سنضيف أحد القيدين الجديدين الناتجين من المتغير x_2 أما $x_2 \geq 3$ أو $x_2 \leq 2$ ودعنا هنا نختار القيد $x_2 \geq 3$.

الشكل 2-2



من القيد $x_2 \geq 3$ يتكون لدينا $-x_2 + \delta_3 = -3$ وبما أن $x_2 = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}\delta_2$ من الجدول (2-7) وعندئذ يكون $\frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}\delta_2 + \delta_3 = -3 + \frac{7}{3} = -\frac{2}{3}$ وبإضافة هذه المعادلة إلى الجدول (2-7) سوف نحصل على الجدول (2-8) :

الجدول (2-8):

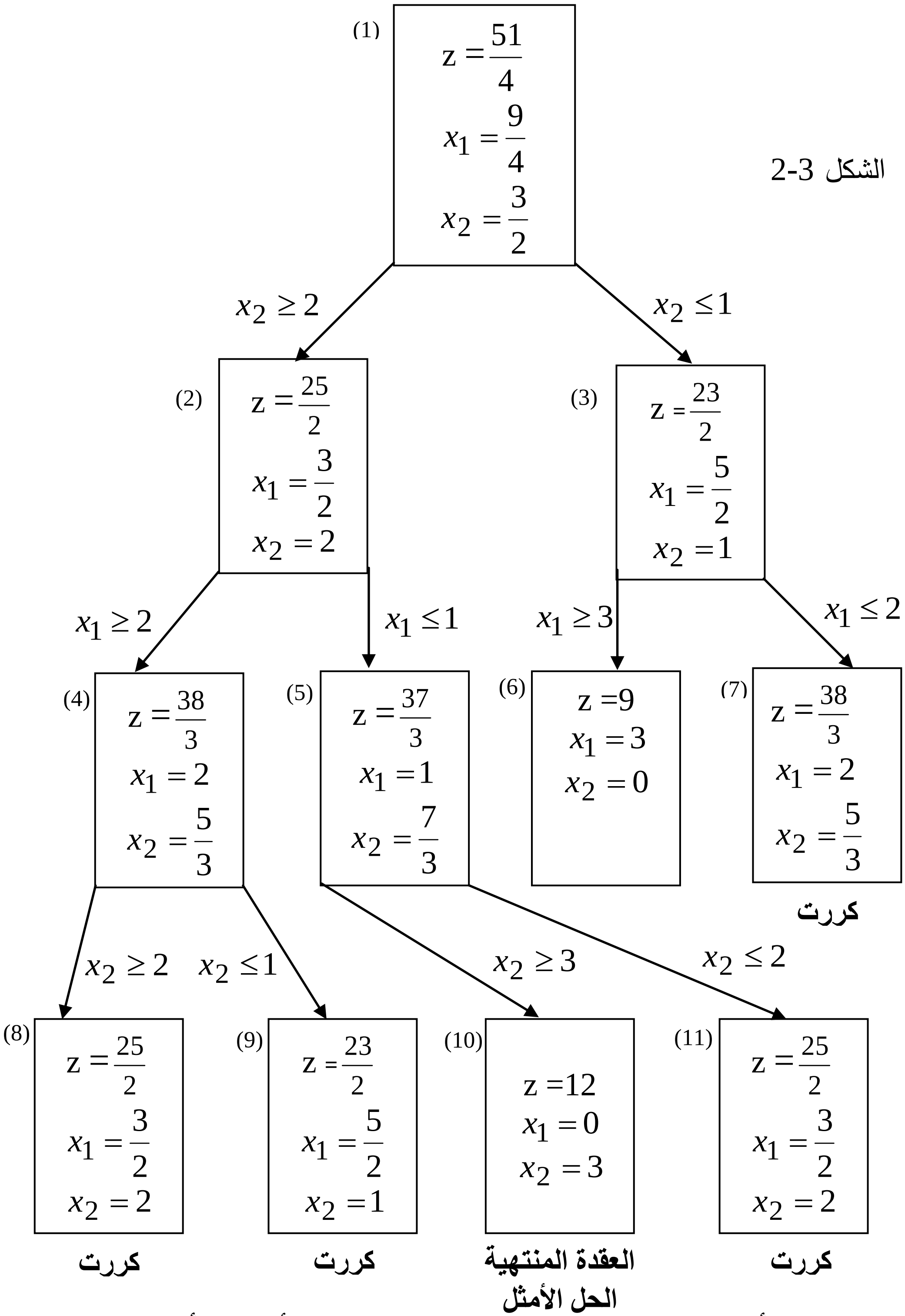
B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1	δ_2	δ_3
x_1	1	1	0	0	0	0	1	0
x_2	$\frac{7}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$	0
z	$\frac{37}{3}$	0	0	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
x_3	$\frac{5}{3}$	0	0	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{-4}{3}$	0
δ_1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{-2}{3}$	0
δ_3	$\frac{-2}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$	1

وباستخدام طريقة سمبلكس على الجدول أعلاه فنحصل على:

الجدول (2-9):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1	δ_2	δ_3
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$
x_2	3	0	1	0	0	0	0	-1
z	12	0	0	0	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
x_3	3	0	0	1	-1	0	0	-2
δ_1	1	0	0	0	0	1	0	-1
δ_2	1	0	0	0	$\frac{-1}{2}$	0	1	$\frac{-3}{2}$

وفي هذه المرحلة تكون شجرة الحل كما موضحة في(الشكل 3-2) :



الشكل 2-3

أخيرا من الجدول (2-9) حصلنا على الحل الأمثل لمسألتنا و الذي هو $x_1 = 0, x_2 = 3, z = 12$ ونلاحظ انه أفضل من الحل الذي في العقدة (6) لان الدالة هي أعظم ما يمكن.

[3-2] خوارزمية طريقة قطع المستويات[8]:

لتكن مسألة البرمجة الصحيحة هي كالأتي:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Maximize } z=c^T x \\ &\text{Subject to } Ax=b \\ &\qquad x \ge 0 \\ &\qquad x_j, j \in I \text{, integral} \end{aligned}\right\} \text{———} (3.1)$$

حيث أن A مصفوفة متكونة من $m \times s$ و b من $m \times 1$ و c من $s \times 1$ و x من $s \times 1$ متجهات.

الخوارزمية:

الخطوة 1:(الحل الابتدائي) ابدأ بحل المسألة المعطاة في (3.1) على أنها مسألة البرمجة الخطية بطريقة سمبلكس(Simplex method) متجاهلا بذلك الشروط (القيود) الصحيحة على المتغيرات. إذا كانت جميع المتغيرات $x_j, j \in I$ لها قيم صحيحة ،توقف ، وإلا اذهب إلى الخطوة 2.

الخطوة 2: (اختيار القيد) اختر السطر من الجدول الأخير من حل مسألة البرمجة الخطية الذي يكون فيه المتغير الأساسي x_{Bi} ذا قيمة غير صحيحة b_i (استخدم السطر الذي تكون فيه قيمة ذلك المتغير لها أكبر جزء كسري ربما يساعد على تقليل عدد التكرارات والوقت المستغرق للتقارب) ومنه قم بتوليد قيد قطع المستويات.

<u>الخطوة 3</u>: (توليد قيد قطع المستويات) افرض أن السطر المختار هو السطر i ومعادلته هي:

$$x_{Bi} + \sum_j a_{ij} x_j = b_i \;,\; j \in I$$

فان

$$x_{Bi} + \sum_j ([a_{ij}] + f_{ij}) x_j = [b_i] + f_i$$

$$x_{Bi} + \sum_j [a_{ij}] x_j - [b_i] = f_i - \sum_j f_{ij} x_j \le 0$$

القيد الجديد

$$f_i - \sum_j f_{ij} x_j + \delta = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.2)$$

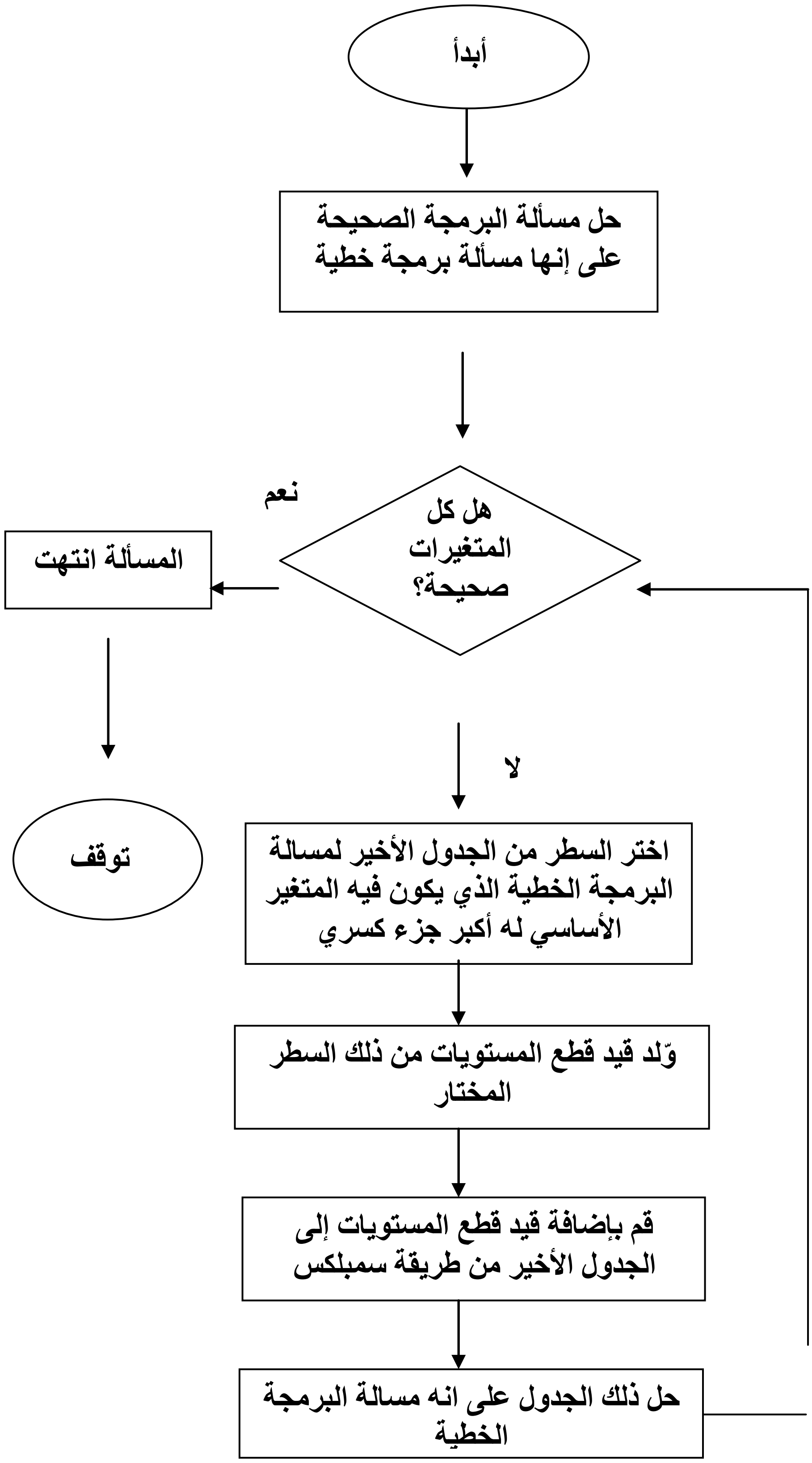
حيث $f_{ij} = a_{ij} - [a_{ij}]$ هو الجزء الكسري لـ a_{ij} ، $0 \le f_{ij} < 1$

$f_i = b_i - [b_i]$ هو الجزء الكسري لـ b_i ، $0 \le f_i < 1$

δ متغير منحل جديد ممكن و صحيح.

<u>الخطوة 4</u>: (إضافة القيد) قم بإضافة القيد (3.2) للجدول الأخير من حل طريقة سمبلكس وقم بالحل على أنها مسألة البرمجة الخطية ، إذا كانت جميع المتغيرات $x_j \; j \in I$, صحيحة فالمسألة انتهت ، وإلا اذهب إلى <u>الخطوة 2</u> .

[3-3] المخطط الانسيابي لطريقة قطع المستويات:



[3-1] مقدمة:

طريقة قطع المستويات(.Cutting Planes method (C.P هي طريقة فريدة من نوعها ، و هي الطريقة التقاربية الثانية لحل مسائل البرمجة الصحيحة والتي نشرت في عام 1958 عن طريق العالم Ralph E. Gomory و قد سميت على اسمه Gomory's Cutting Planes method .

الفكرة الأساسية لطريقة قطع المستويات هي إضافة قيد **(قاطع)** للمسألة مرة تلو الأخرى إلى أن تتكون مسألة البرمجة الخطية مع الحل الأمثل مع القيم الصحيحة.

لهذا القيد خاصتان أساسيتان : الأولى ، الحل الأمثل غير الصحيح لمسألة البرمجة الخطية لن يحقق هذا القيد ، الثانية ، كل الحلول الممكنة الصحيحة للمسألة الأصلية سوف تحقق هذا القيد الجديد.[13]

تقنية قطع المستويات تتضمن دورة من تكرار خطوتين إلى حين الحصول على الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الصحيحة وهاتان الخطوتان هما :

1-حِل بمساعدة البرمجة الخطية.

2-رتب منطقة الحل الممكن للمسألة غير الصحيحة و ارجع إلى الخطوة 1.

طريقة قطع المستويات لها عدد من النقاط الجيدة مع احتمالية كبيرة كون هذه الخوارزمية التي تستخدم التقنية تتقارب إلى الحل من خلال قطوع إذا كانت هذه القطوع متجهة بتقارب إلى الحل الأمثل في وقت معقول بالنسبة إلى وقت تقارب طريقة التفرعات والعقد، ومن جهة أخرى إذا كانت هذه القطوع غير متقاربة إلى الحل

الأمثل بسرعة سيكون من المحتمل جدا اخذ عدد كبير من هذه القطوع للحصول على التقارب. [11]

طريقة قطع المستويات تعيد صفة التقيد على المتغيرات الحقيقية كما في طريقة التفرعات و العقد ، نكوّن سلسلة من القيود (القطوع) و إضافتها الى المسألة و إعادة حلها ، وإذا كانت هناك دقة في تكوين القيود سوف لن نخسر أي حل ممكن ، وسنرى أخيرا ان حل مسألة البرمجة الخطية صحيح و أمثل لمسألة البرمجة الصحيحة الأصلية.

عند العمل مع قطع المستويات ، سوف نضيف قيدا واحدا أو أكثر في كل تكرار و كل من هذه القيود لها الصفات الآتية:

1-يكون حل مسألة البرمجة الخطية غير ممكن عند هذا القيد.

2-لا يوجد حل صحيح ممكن عند القيود الأصلية ويكون غير ممكن بوساطة القيد الجديد.

القيد الجديد ينقل بعض الحلول غير الصحيحة من منطقة الحل ولا ينقل الحلول الصحيحة و بعد إضافته تحل المسألة على أنها مسألة البرمجة الخطية ، وتستمر العملية الى حين الحصول على الحل الصحيح وهذا الحل يجب ان يكون امثل لمسألة البرمجة الصحيحة الأصلية.

التقارب النهائي للطريقة يعتمد على نوعية القطوع المضافة عند كل تكرار ، هنالك عدة طرائق ليس لكلها تقارب منته مضمون ، ففي حالة تحديد القيد الذي له الصفات السابقة يكون الاعتماد على نوعية المسألة المراد حلها.

طريقة قطع المستويات يمكن تطبيقها على مسائل البرمجة الصحيحة سواء كانت مطلقة أم مختلطة.[10]

الخطوط العريضة لطريقة قطع المستويات:

الفكرة الأساسية لطريقة قطع المستويات بسيطة لمسألة البرمجة الصحيحة المعطاة مسالة البرمجة الخطية هي بالضبط مسألة البرمجة الصحيحة ولكن بدون الشروط على المتغيرات والتي تكون صحيحة الحل . إذا كان الحل متكوناً من قيم صحيحة فقط فسيكون الحل الأمثل لمسالة البرمجة الصحيحة وإلا يزداد قيد جديد لمسألة البرمجة الصحيحة . هذا القيد الجديد يضاف بحيث ان كل الحلول الصحيحة للقيد القديم تحقق القيد الجديد ويبقى الحل الأمثل غير الصحيح لا يحقق هذا القيد .في الحل الهندسي القيد الجديد المضاف لمسألة البرمجة الخطية سوف(يقطع) الحل غير الصحيح فقط وليس النقاط الصحيحة التي من الممكن أن تكون حلول ممكنة لمسألة البرمجة الصحيحة . نظرية (القطع) للحل غير الصحيح بإضافة قيد واحد كل مرة وتتكرر إلى حين الحصول على الحل الأمثل المتكون من القيم الصحيحة.

خوارزمية طريقة قطع المستويات فعالة في حل مسائل البرمجة الصحيحة. ولكن تأخذ وقتا طويلا في الحل وتكون بطيئة و لهذه الأسباب تكون طريقة قطع المستويات تقنية ليست معروفة كطريقة التفرعات و العقد في حل مسائل البرمجة الخطية الصحيحة. [15]

[3-4] مثال:حل مسألة البرمجة الخطية الصحيحة المطلقة الآتية بطريقة قطع المستويات [8]:

Maximize $z=3x_1+4x_2$

Subject to $2x_1+x_2\le 6$ ———— 1 المستقيم

$2x_1+3x_2\le 9$ ———— 2 المستقيم

$x_1\ge 0, x_2\ge 0,$ integral

الحل:

نقوم أولا بإضافة المتغيرات المنحلة x_3, x_4 إلى المسألة أعلاه كالأتي : $2x_1+x_2+x_3=6$ و $2x_1+3x_2+x_4=9$ والحل على أنها مسألة البرمجة الخطية متجاهلا الشروط الصحيحة على المتغيرين x_1, x_2 كما في الخطوة 1 والحصول على الجدول الأخير من حل البرمجة الخطية الموضح في الجدول (1- 3) ومن هذا الجدول نحصل على الحل الأمثل الحقيقي(غير الصحيح) $x_1=\frac{9}{4}, x_2=\frac{3}{2}, z=\frac{51}{4}$.

سوف نختار السطر الثاني من الجدول أدناه لتكوين قيد قطع المستويات و بما أن المتغير الأساسي x_2 له أكبر جزء كسري والذي هو $\frac{1}{2}$ لذلك سيكون القاطع المتولد من هذا السطر هو افضل الكل.

الجدول (3-1):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	$\frac{9}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{-1}{4}$
x_2	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$
z	$\frac{51}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$

نستطيع أن نحصل على قيود قطع مستويات أخرى من السطر الأول و الثالث ولكن ربما لا تؤدي هذه القيود إلى الحل الأمثل أو ربما تأخذ المسألة عدداً أكبر من التكرارات والوقت للوصول إلى الحل النهائي.

الآن سوف نطبق الخطوة 3 للخوارزمية على السطر الثاني من الجدول (1-3) كالأتي:

$$x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 + (\frac{-2}{2} + \frac{1}{2})x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{2}{2} + \frac{1}{2}$$

$$x_2 - x_3 - 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

وسوف تكون بالشكل :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \le 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(قيد القاطع 1)}$$

$$\frac{-1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \delta_1 = \frac{-1}{2} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1)$$

وفي الطريقة نفسها يمكن الحصول على القواطع من السطر الأول و الثالث من الجدول نفسه:

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \le 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(قيد القاطع 2)}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \le 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(قيد القاطع 3)}$$

على التوالي

ومن أي واحد من هذين الاثنين نحصل على:

$$\frac{-3}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 + \delta_1 = \frac{-1}{4} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.2)$$

ملاحظة: نرى ان (قيد القاطع 2) و (قيد القاطع 3) متساويان ولهذا يمكننا اخذ أي واحد منهم. لقد علمنا من البداية ان (قيد القاطع 1) هو افضل من (قيد القاطع 2) أو (قيد القاطع 3) ويمكننا برهان ذلك بطريقة أخرى:

من بداية الحل بعد إضافة المتغيرات المنحلة x_3, x_4 على القيود الأصلية للمسألة يمكننا الحصول على:

$$x_3 = 6 - 2x_1 - x_2 \quad \ldots\ldots(3.3)$$

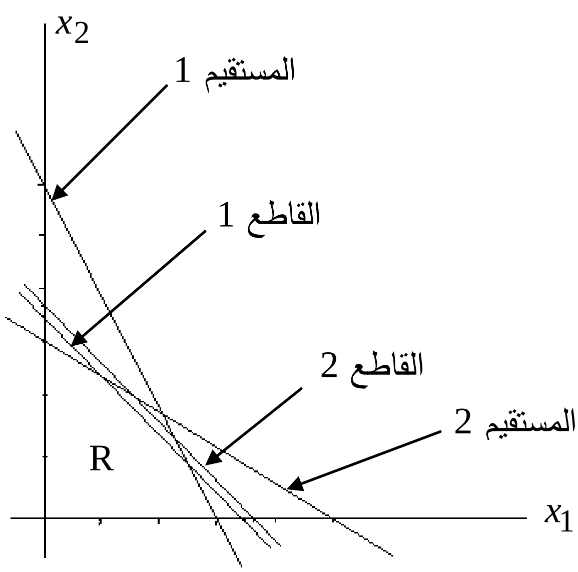
$$x_4 = 9 - 2x_1 - 3x_2 \quad \ldots\ldots(3.4)$$

الآن بتعويض (3.3) و (3.4) في (قيد القاطع 1) و (قيد القاطع 2) على التوالي سوف نحصل على:

$2x_1 + 2x_2 \leq 17$ (القاطع 1) ....

$3x_1 + 3x_2 \leq 21$ (القاطع 2) ....

وبرسم (القاطع 1) و (القاطع 2) :



الشكل 1-3

من (الشكل 1-3) نلاحظ ان (القاطع 1) يقطع منطقة الحل الممكن R اكثر من (القاطع 2) وهذا يبرهن أن (القاطع 1) هو أكفأ من (القاطع 2).

الآن بتطبيق الخطوة 4 بإضافة المعادلة (3.1) إلى الجدول (1-3) كالأتي:

الجدول (2-3):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3 ↓	x_4	δ_1
x_1	$\frac{9}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{-1}{4}$	0
x_2	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
z	$\frac{51}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	0
← δ_1	$\frac{-1}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	1

وباستخدام طريقة سمبلكس على الجدول أعلاه فنحصل على:

الجدول (3-3):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1
x_1	$\frac{3}{2}$	1	0	0	-1	$\frac{3}{2}$
x_2	2	0	1	0	1	-1
z	$\frac{25}{2}$	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$
x_3	1	0	0	1	1	-2

من الجدول (3-3) نرى أن المتغير x_1 مازالت قيمته غير صحيحة وعليه نعود إلى الخطوة 2 للحصول على قيد قطع مستويات جديد من السطر الأول من هذا الجدول كالأتي:

$$x_1 - x_4 + \frac{3}{2}\delta_1 = \frac{3}{2}$$

$$x_1 - x_4 + (\frac{2}{2} + \frac{1}{2})\delta_1 = \frac{3}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2}$$

$$x_1 - x_4 + \delta_1 - 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta_1 \leq 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta_1 + \delta_2 = 0 \longrightarrow \frac{-1}{2}\delta_1 + \delta_2 = \frac{-1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.5)$$

بوساطة الخطوة 4 سوف نقوم بإضافة المعادلة (3.5) إلى الجدول (3-3) كالأتي:

الجدول (3-4):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1 ↓	δ_2
x_1	$\frac{3}{2}$	1	0	0	-1	$\frac{3}{2}$	0
x_2	2	0	1	0	1	-1	0
z	$\frac{25}{2}$	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0
x_3	1	0	0	1	1	-2	0
← δ_2	$\frac{-1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{-1}{2}$	1

وباستخدام طريقة سمبلكس على الجدول أعلاه فنحصل على:

الفصل الثالث طريقة قطع المستويات

الجدول (3-5):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1	δ_2
x_1	0	1	0	0	-1	0	3
x_2	3	0	1	0	1	0	-2
z	12	0	0	0	1	0	1
x_3	3	0	0	1	1	0	-4
δ_1	1	0	0	0	0	1	-2

من الجدول (3-5) نحصل على الحل الأمثل لمسألة البرمجة الصحيحة والذي هو: $x_1 = 0, x_2 = 3, z = 12$

[4-1] مقدمة:

طريقة القطع و التفرع Cut and Branch method (C.B.) هي تقنية ناجحة جدا في حل مجموعة واسعة من مسائل البرمجة الصحيحة وهي توفر ضمانية الوصول إلى الحل الأمثل. وسوف نقوم بتوضيح كيفية أداء هذه التقنية.

مساحة خوارزمية طريقة القطع والتفرع مستمرة التطور وهي واعدة بان تكون ذات أهمية أكبر مع استغلال سرعة الحاسوب.

عدد كبير من مسائل البرمجة الخطية الصحيحة ممكن حلها بوساطة طريقة القطع و التفرع و التي تكون خوارزميتها متكونة بالضبط من(التركيب ما بين طريقة قطع المستويات و طريقة التفرعات و العقد) و هي تعمل كسابقتها في حل سلسلة(متتابعة) من مسائل البرمجة الخطية للحصول على حل مسألة البرمجة الصحيحة.

طريقة قطع المستويات التي تم توضيحها في الفصل السابق لا تظهر طريقة قوية مؤدية إلى تقارب بطيء وربما لا تؤدي إلى الحل الأمثل كما في طريقة التفرعات و العقد التي تكون اكثر سرعة و ضمانة للوصول إلى الحل الأمثل لذلك حاولنا جعل طريقة قطع المستويات أفضل من السابق بوساطة طريقة التفرعات و العقد و التي أسميناها بطريقة القطع و التفرع.

وأصبح من غير الممكن أن نحل بصورة فعالة جدا مسائل البرمجة الصحيحة مستخدما فقط طريقة قطع المستويات لذلك يكون من الضروري أن نستخدم التفرع مؤديا إلى طريقة القطع و التفرع.

لطريقة القطع و التفرع عدة نقاط إيجابية والتي من أهمها تقليل عدد العقد في طريقة التفرعات و العقد(و الذي يقلل من حجم الذاكرة المطلوبة) فضلا عن تقليل الوقت المستغرق في الحل بطريقة قطع المستويات. لذلك فهي تساعد على إيجاد الحل بصورة سريعة والذي يكون مهماً في بعض التطبيقات.

[4-2] خوارزمية أولى إلى طريقة القطع و التفرع المقترحة:

لتكن مسألة البرمجة الصحيحة هي كالأتي:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Maximize } z=c^T x \\ &\text{Subject to } Ax=b \\ &\qquad x\geq 0 \\ &\qquad x_j,\ j\in I \text{ , integral} \end{aligned}\right\} \quad (4.1)$$

حيث ان A مصفوفة متكونة من $m\times s$ و b من $m\times 1$ و c من $s\times 1$ و x من $s\times 1$ متجهات.

الخوارزمية:

الخطوة 1:(الحل الابتدائي) ابدأ بحل المسألة المعطاة في (4.1) على انها مسألة البرمجة الخطية بطريقة سمبلكس (Simplex method) متجاهلا بذلك الشروط (القيود) الصحيحة على المتغيرات. إذا كانت جميع المتغيرات $x_j, j \in I$ لها قيم صحيحة ،توقف ، وإلا اذهب إلى الخطوة 2.

الخطوة 2: (اختيار القيد) اختر السطر من الجدول الأخير من حل مسألة البرمجة الخطية الذي يكون فيه المتغير الأساسي x_{Bi} ذا قيمة غير صحيحة b_i (استخدم السطر الذي تكون فيه قيمة ذلك المتغير لها أكبر جزء كسري ربما يساعد على تقليل عدد التكرارات والوقت المستغرق للتقارب) ومنه قم بتوليد قيد قطع المستويات.

الخطوة 3: (توليد قيد قطع المستويات) افرض أن السطر المختار هو السطر i ومعادلته

هي:

فان $x_{Bi} + \sum_{j} a_{ij} x_j = b_i \ , \ \ j \in I$

$$x_{Bi} + \sum_{j} ([a_{ij}] + f_{ij}) x_j = [b_i] + f_i$$

$$x_{Bi} + \sum_{j} [a_{ij}] x_j - [b_i] = f_i - \sum_{j} f_{ij} x_j \leq 0$$

$$f_i - \sum_{j} f_{ij} x_j + \delta = 0 \ \ldots\ldots\ldots \text{القيد الجديد} \ldots\ldots\ldots (4.2)$$

حيث $f_{ij} = a_{ij} - [a_{ij}]$ هو الجزء الكسري لـ a_{ij} ، $0 \leq f_{ij} < 1$

$f_i = b_i - [b_i]$ هو الجزء الكسري لـ b_i ، $0 \leq f_i < 1$

δ متغير منحل جديد ممكن و صحيح.

الخطوة 4: (إضافة القيد) قم بإضافة القيد (4.2) إلى الجدول الأخير من حل طريقة سمبلكس لمسألة البرمجة الخطية وحلها على أنها مسألة البرمجة الخطية ، إذا كانت:

1- كل المتغيرات $x_j , j \in I$ ذات قيم صحيحة ممكنة فان المسألة انتهت. وإلا اذهب إلى 2 .

2- كل المتغيرات $x_j , j \in I$ ذات قيم غير صحيحة فاذهب إلى الخطوة 2. وإلا اذهب إلى 3 .

3- متغير واحد من المتغيرات $x_j , j \in I$ له قيمة صحيحة وبذلك ابدأ باستخدام طريقة التفرعات و العقد لتفرع المتغير غير الصحيح أي اذهب إلى الخطوة 5.

الخطوة 5: (اختيار المتغير المتفرع) اختر المتغير ذا القيمة غير الصحيحة من $x_j, j \in I$ والذي سيستخدم لتكوين قيود التفرع والذي له أكبر جزء كسري.

المتغير x_j المختار يجب أن يكون متغيرا أساسيا و إلا ستكون قيمته صفرا . افرض أن المتغير هو المتغير الأساسي i من الجدول الأخير لحل طريقة سمبلكس ولتكن قيمته x_{Bi} . سوف نكتب $x_{Bi} = [x_{Bi}] + f_i$ حيث $0 < f_i < 1$. بما أن المتغير x_j قيمة صحيحة . فيجب أن يحقق إما:

$$[x_{Bi}] \text{ ....} (4.3) \leq x_j$$

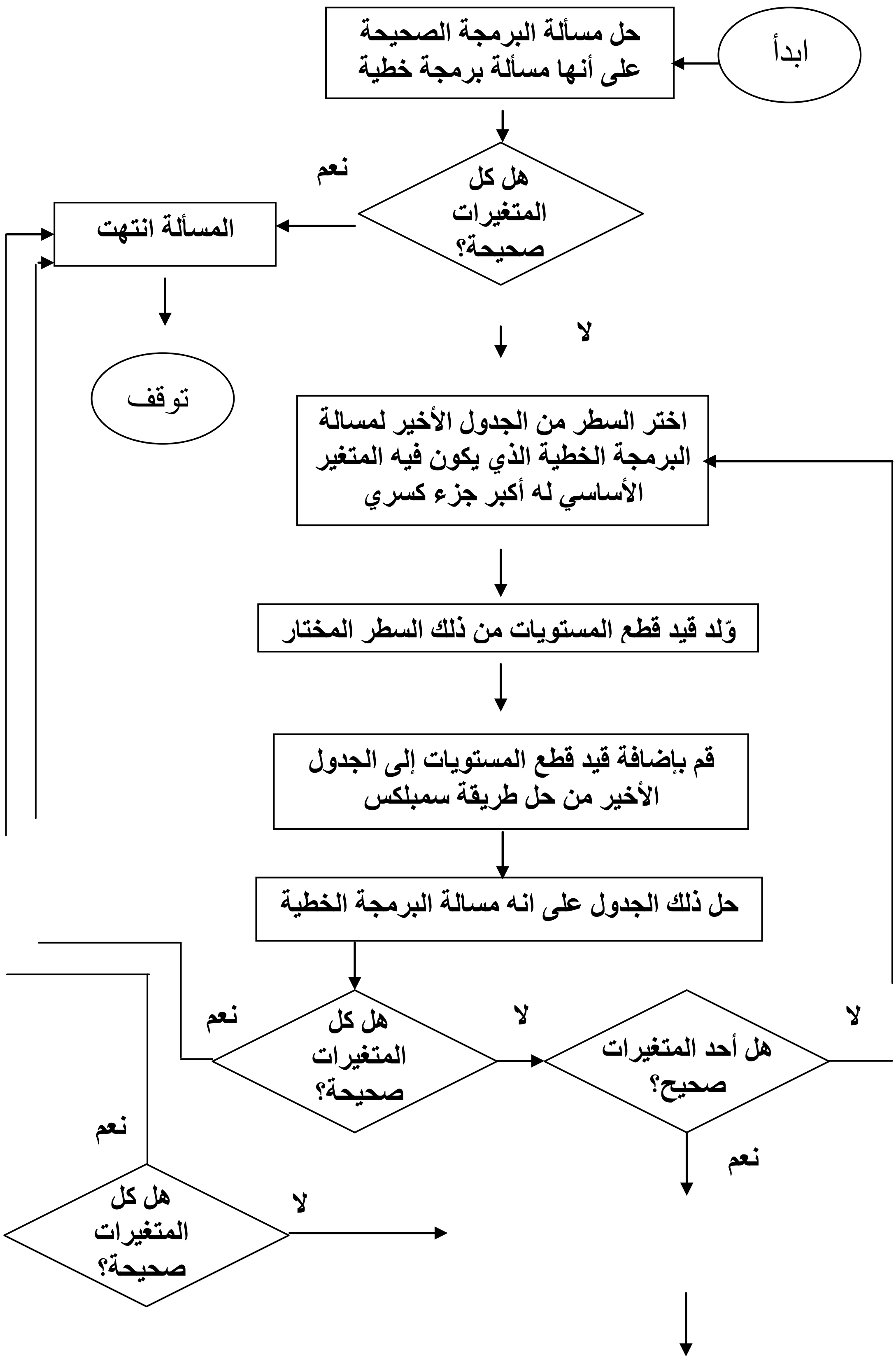
أو

$$x_j \geq [x_{Bi}] + 1 \text{ ....} (4.4)$$

الخطوة 6: (صيغة العقدة الجديدة) كوّن مسألتين جديدتين من مسائل البرمجة الصحيحة بالقيود المتمثلة في الخطوة 5. مسألة واحدة متكونة من إضافة القيد (4.3) والمسألة الأخرى متكونة من إضافة القيد (4.4) وحل كل من هاتين المسألتين على انهما مسائل البرمجة الخطية باستخدام طريقة سمبلكس.

الخطوة 7: (اختبر العقدة المنتهية) كل عقدة من العقد المتكونة في الخطوة 6 ربما تكون عقدة منتهية لسبب واحد من الأسباب الآتية ، أولا ، المسألة المتمثلة بهذه العقدة ليس لها حل ممكن ، ثانيا ، قيمة المتغيرات $x_j, j \in I$ جميعها صحيحة وهذا هو الحل الأمثل للمسألة (4.1) . أما إذا كانت تلك العقدة غير منتهية فأرجع إلى الخطوة 5.

[4-3] المخطط الانسيابي لطريقة القطع و التفرع المقترحة:



أختر المتغير غير الصحيح الذي له أكبر جزء كسري وقم بتفريعه الى قيدين جديدين

كوّن مسألتين جديدتين من مسائل البرمجة الصحيحة بإضافة هذين القيدين الجديدين إلى الجدول الأخير لطريقة سمبلكس

حل كل مسألة على أنها مسالة برمجة خطية

[4-4]مثال:حل مسألة البرمجة الخطية الصحيحة المطلقة الآتية بطريقة القطع والتفرع:

$$\text{Maximize } z = 3x_1 + 4x_2$$
$$\text{Subject to } 2x_1 + x_2 \le 6$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 9$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \text{ integral}$$

الحل:

نقوم أولا بإضافة المتغيرات المنحلة x_3, x_4 إلى المسألة أعلاه كالأتي $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$ و $2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9$ والحل على أنها مسألة البرمجة الخطية متجاهلا الشروط الصحيحة على المتغيرين x_1, x_2 كما في <u>الخطوة 1</u> والحصول على الجدول الأخير من حل البرمجة الخطية الموضح في الجدول (1-4) ومن هذا الجدول نحصل على الحل الأمثل الحقيقي(غير الصحيح) $x_1 = \frac{9}{4}, x_2 = \frac{3}{2}, z = \frac{51}{4}$.

سوف نختار السطر الثاني من الجدول أدناه لتكوين قيد قطع المستويات و بما أن المتغير الأساسي x_2 له أكبر جزء كسري والذي هو $\frac{1}{2}$ لذلك سيكون القاطع المتولد من هذا السطر هو افضل الكل.

الجدول (4-1):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	$\frac{9}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{-1}{4}$
x_2	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$
z	$\frac{51}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$

نستطيع أن نحصل على قيود قطع مستويات أخرى من السطر الأول و الثالث ولكن ربما لا تؤدي هذه القيود إلى الحل الأمثل أو ربما ستأخذ المسألة عددا أكبر من التكرارات و الوقت للوصول إلى الحل النهائي.

الآن سوف نطبق <u>الخطوة 3</u> للخوارزمية على السطر الثاني من الجدول (4-1) كالأتي:

$$x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 + (\frac{-2}{2} + \frac{1}{2})x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{2}{2} + \frac{1}{2}$$

$$x_2 - x_3 - 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

وسوف تكون بالشكل :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \leq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(قيد القاطع 1)}$$

$$\frac{-1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \delta_1 = \frac{-1}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.1)$$

وفي الطريقة نفسها يمكن الحصول على القواطع من السطر الأول و الثالث من الجدول نفسه:

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \leq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(قيد القاطع 2)}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \leq 0 \ldots \text{(قيد القاطع 3)} \ldots\ldots$$

على التوالي

ومن أي واحد من هذين الاثنين نحصل على:

$$\frac{-3}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 + \delta_1 = \frac{-1}{4} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(4.2)$$

ملاحظة: نرى ان (قيد القاطع 2) و (قيد القاطع 3) متساويان ولهذا يمكننا اخذ أي واحد منهم.

الآن بتطبيق الخطوة 4 بإضافة المعادلة (4.1) إلى الجدول (4-1) كالأتي:

الجدول (4-2):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3 ↓	x_4	δ_1
x_1	$\frac{9}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{-1}{4}$	0
x_2	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
z	$\frac{51}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	0
← δ_1	$\frac{-1}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	1

وباستخدام طريقة سمبلكس على الجدول أعلاه فنحصل على:

الجدول (4-3):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1
x_1	$\frac{3}{2}$	1	0	0	-1	$\frac{3}{2}$
x_2	2	0	1	0	1	-1
z	$\frac{25}{2}$	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$
x_3	1	0	0	1	1	-2

الآن ، من الجدول (3-4) نلاحظ أن المتغير x_1 مازالت قيمته غير صحيحة لذلك سوف نبدأ باستخدام طريقة التفرعات و العقد للعمل على تفرع المتغير x_1 إلى قيدين جديدين بوساطة الخطوة 5 كالأتي $x_1 \geq 2, x_1 \leq 1$ وإضافتهما إلى الجدول أعلاه (3- 4)

لنختار هنا القيد $x_1 \leq 1$.الآن $x_1 + \delta_2 = 1$ و $x_1 = \frac{3}{2} + x_4 - \frac{3}{2}\delta_1$ من الجدول نفسه و بتعويضه نحصل على :

$$x_4 - \frac{3}{2}\delta_1 + \delta_2 = 1 - \frac{3}{2} = \frac{-1}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.3)$$

سنقوم بتطبيق الخطوة 5 بإضافة القيد (4.3) إلى الجدول (3-4) كالأتي:

الجدول (4-4):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1 ↓	δ_2
x_1	$\frac{3}{2}$	1	0	0	-1	$\frac{3}{2}$	0
x_2	2	0	1	0	1	-1	0
z	$\frac{25}{2}$	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0
x_3	1	0	0	1	1	-2	0
← δ_2	$\frac{-1}{2}$	0	0	0	1	$\frac{-3}{2}$	1

وباستخدام طريقة سمبلكس على الجدول أعلاه فنحصل على:

الجدول (4-5):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1	δ_2
x_1	1	1	0	0	0	0	1
x_2	$\frac{7}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$
z	$\frac{37}{3}$	0	0	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
x_3	$\frac{5}{3}$	0	0	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{-4}{3}$
δ_1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{-2}{3}$	1	$\frac{-2}{3}$

من تفرع المتغير $x_1 = \frac{3}{2}$ وإضافة القيود $x_1 \geq 2$ و $x_1 \leq 1$ حصلنا على $x_1 = 2, x_2 = \frac{5}{3}, z = \frac{38}{3}$ و $x_1 = 1, x_2 = \frac{7}{3}, z = \frac{37}{3}$ على التوالي ، نلاحظ أن المتغير x_2 مازالت قيمته غير صحيحة لذلك سنقوم بتفريعه ولنأخذ x_2 عندما تكون قيمته $\frac{7}{3}$ فنحصل على : $x_2 \geq 3$ و $x_2 \leq 2$.

في البداية لنأخذ القيد $x_2 \leq 2$ و بإضافة المتغير المنحل $x_2 + \delta_3 = 2$ حيث :

$$x_2 = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}\delta_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.4)$$

من الجدول (4-5) ، و بتعويض (4.4) يكون $\frac{-1}{3}x_4 + \frac{2}{3}\delta_2 + \delta_3 = 2 - \frac{7}{3} = \frac{-1}{3}$

والضرب من كلا الطرفين بـ (-1) نحصل على:

$$\frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}\delta_2 - \delta_3 = \frac{1}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.5)$$

وبإضافة (4.5) الى الجدول (4-5) كالأتي:

الجدول (4-6):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1	δ_2 ↓	δ_3
x_1	1	1	0	0	0	0	1	0
x_2	$\frac{7}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$	0
z	$\frac{37}{3}$	0	0	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
x_3	$\frac{5}{3}$	0	0	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{-4}{3}$	0
δ_1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{-2}{3}$	1	$\frac{-2}{3}$	0
← δ_3	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$	-1

وباستخدام طريقة سمبلكس على الجدول أعلاه فنحصل على:

الجدول (4-7):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1	δ_2	δ_3
x_1	$\frac{3}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{-3}{2}$
x_2	2	0	1	0	0	0	0	1
z	$\frac{25}{2}$	0	0	0	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$
x_3	1	0	0	1	-1	0	0	2
δ_1	0	0	0	0	-1	1	0	1

δ_2	$\frac{-1}{2}$	0	0	0	$\frac{-1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$

الحل الموجود في الجدول (4-7) هو حل مكرر في الجدول (4-3) لذلك سنتوقف في التفرع على القيد $x_2 \le 2$ ونأخذ القيد الأخر $x_2 \ge 3$ وبإضافة المتغير المنحل $-x_2 + \delta_2 = -3$ وبتعويض المعادلة (4.4) نحصل على :

$$\frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}\delta_2 + \delta_3 = -3 + \frac{7}{3} = \frac{-2}{3} \quad ....(4.6)$$

وبإضافة المعادلة (4.6) الى الجدول (4-5) كالأتي:

الجدول (4-8):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1	δ_2	δ_3
x_1	1	1	0	0	0	0	1	0
x_2	$\frac{7}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$	0
z	$\frac{37}{3}$	0	0	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
x_3	$\frac{5}{3}$	0	0	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{-4}{3}$	0
δ_1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{-2}{3}$	1	$\frac{-2}{3}$	0
δ_3	$\frac{-2}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$	1

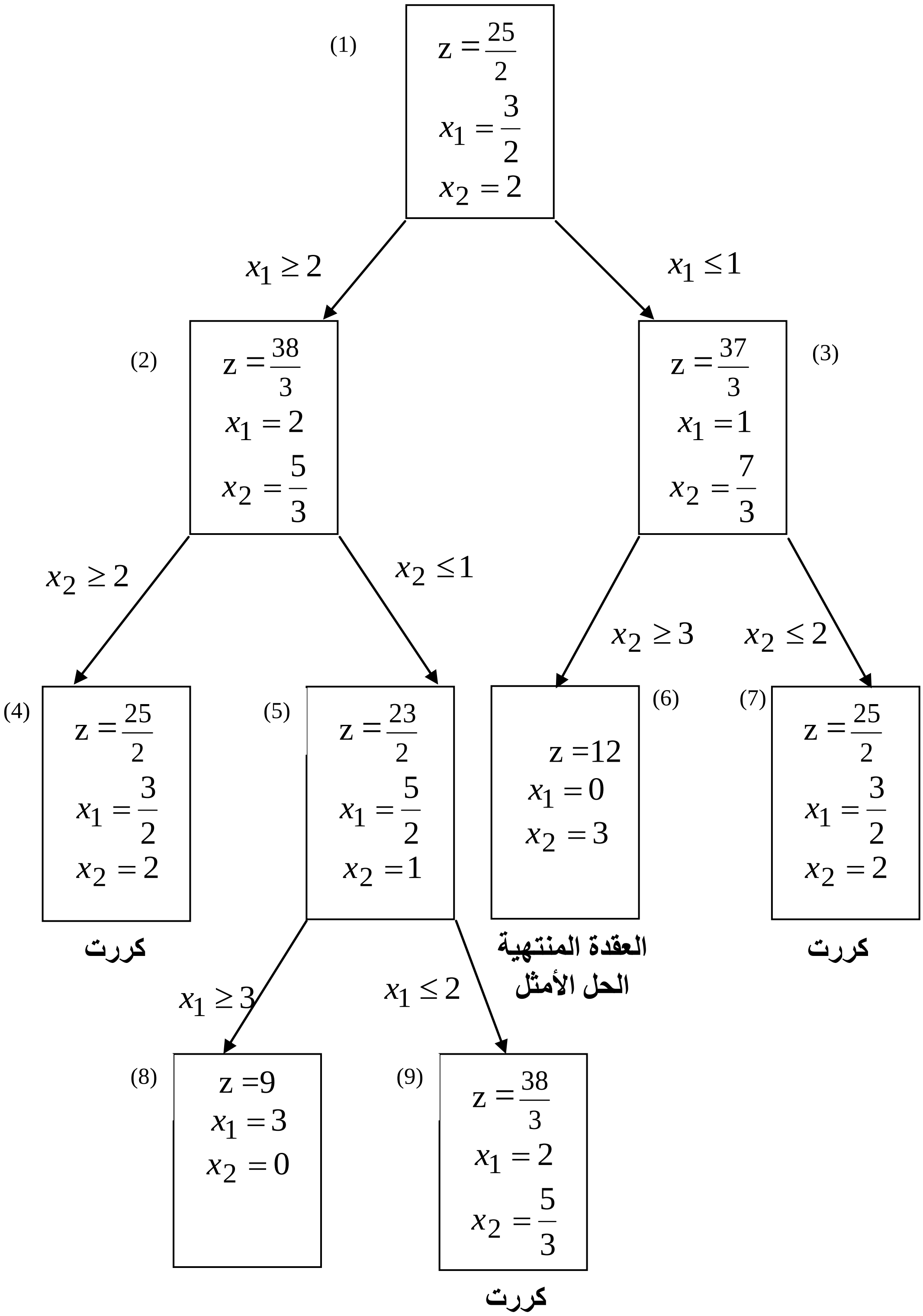
وباستخدام طريقة سمبلكس على الجدول أعلاه فنحصل على:

الجدول (4-9):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1	δ_2	δ_3
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$
x_2	3	0	1	0	0	0	0	-1
z	12	0	0	0	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
x_3	3	0	0	1	-1	0	0	-2
δ_1	1	0	0	0	-1	1	0	-1
δ_2	1	0	0	0	$\frac{-1}{2}$	0	1	$\frac{-3}{2}$

أخيرا من الجدول (4-9) حصلنا على الحل الأمثل للمسألة والذي هو:

$x_1 = 0, x_2 = 3, z = 12$ كما موضح في شجرة الحل الآتية:



(1)
$z=\frac{25}{2}$
$x_1=\frac{3}{2}$
$x_2=2$
$x_1 \ge 2$
$x_1 \le 1$
(2)
$z=\frac{38}{3}$
$x_1=2$
$x_2=\frac{5}{3}$
(3)
$z=\frac{37}{3}$
$x_1=1$
$x_2=\frac{7}{3}$
$x_2 \ge 2$
$x_2 \le 1$
$x_2 \ge 3$
$x_2 \le 2$
(4)
$z=\frac{25}{2}$
$x_1=\frac{3}{2}$
$x_2=2$
كررت
(5)
$z=\frac{23}{2}$
$x_1=\frac{5}{2}$
$x_2=1$
(6)
$z=12$
$x_1=0$
$x_2=3$
العقدة المنتهية
الحل الأمثل
(7)
$z=\frac{25}{2}$
$x_1=\frac{3}{2}$
$x_2=2$
كررت
$x_1 \ge 3$
$x_1 \le 2$
(8)
$z=9$
$x_1=3$
$x_2=0$
(9)
$z=\frac{38}{3}$
$x_1=2$
$x_2=\frac{5}{3}$
كررت

[4-5] خوارزمية ثانية إلى طريقة القطع و التفرع المقترحة (طريقة القطع والتفرع والقطع):

لتكن مسألة البرمجة الصحيحة هي كالأتي:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Maximize } z=c^T x \\ &\text{Subject to } Ax=b \\ &\qquad x\geq 0 \\ &\qquad x_j ,\ j\in I \text{ , integral} \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

حيث أن A مصفوفة متكونة من $m\times s$ و b من $m\times 1$ و c من $s\times 1$ و x من $s\times 1$ متجهات.

<u>الخوارزمية:</u>

<u>الخطوة 1</u>:(الحل الابتدائي) ابدأ بحل المسألة المعطاة في (4.1) على انها مسألة البرمجة الخطية بطريقة سمبلكس(Simplex method) متجاهلا بذلك الشروط (القيود) الصحيحة على المتغيرات. إذا كانت جميع المتغيرات $x_j ,\ j\in I$ لها قيم صحيحة ،توقف ، وإلا اذهب إلى <u>الخطوة 2</u>.

<u>الخطوة 2</u>: (اختيار القيد) اختر السطر من الجدول الأخير من حل مسألة البرمجة الخطية الذي يكون فيه المتغير الأساسي x_{Bi} ذا قيمة غير صحيحة b_i (استخدم السطر الذي تكون فيه قيمة ذلك المتغير لها أكبر جزء كسري ربما يساعد على تقليل عدد التكرارات والوقت المستغرق للتقارب) ومنه قم بتوليد قيد قطع المستويات.

الخطوة 3: (توليد قيد قطع المستويات) افرض أن السطر المختار هو السطر i ومعادلته هي:

فان $x_{Bi} + \sum_j a_{ij} x_j = b_i \ , \quad j \in I$

$$x_{Bi} + \sum_j ([a_{ij}] + f_{ij}) x_j = [b_i] + f_i$$

$$x_{Bi} + \sum_j [a_{ij}] x_j - [b_i] = f_i - \sum_j f_{ij} x_j \le 0$$

القيد الجديد $f_i - \sum_j f_{ij} x_j + \delta = 0$ ....(4.2)

حيث $f_{ij} = a_{ij} - [a_{ij}]$ هو الجزء الكسري لـ a_{ij} ، $0 \le f_{ij} < 1$

$f_i = b_i - [b_i]$ هو الجزء الكسري لـ b_i ، $0 \le f_i < 1$

δ متغير منحل جديد ممكن و صحيح.

الخطوة 4: (إضافة القيد) قم بإضافة القيد (4.2) إلى الجدول الأخير من حل طريقة سمبلكس لمسألة البرمجة الخطية وحلها على أنها مسألة البرمجة الخطية ، إذا كانت:

1- كل المتغيرات $x_j , j \in I$ ذات قيم صحيحة ممكنة فان المسألة انتهت. وإلا اذهب إلى 2 .

2- كل المتغيرات $x_j , j \in I$ ذات قيم غير صحيحة فاذهب إلى الخطوة 2. وإلا اذهب إلى 3 .

3- متغير واحد من المتغيرات $x_j , j \in I$ له قيمة صحيحة وبذلك ابدأ باستخدام طريقة التفرعات و العقد لتفرع المتغير غير الصحيح أي اذهب إلى الخطوة 5.

الخطوة 5: (اختيار المتغير المتفرع) اختر المتغير ذا القيمة غير الصحيحة من $x_j , j \in I$ والذي سيستخدم لتكوين قيود التفرع والذي له أكبر جزء كسري.

المتغير x_j المختار يجب أن يكون متغيرا أساسيا و إلا ستكون قيمته صفرا .

افرض أن المتغير هو المتغير الأساسي i من الجدول الأخير لحل طريقة سمبلكس ولتكن قيمته x_{Bi} . سوف نكتب x_{Bi} f_i + $[x_{Bi}]$= حيث $0< f_i <1$. بما أن المتغير x_j قيمة صحيحة . فيجب أن يحقق إما:

$$[x_{Bi}] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.3) \le x_j$$

أو

$$x_j \ge [x_{Bi}]+1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.4)$$

الخطوة 6: (صيغة العقدة الجديدة) كوّن مسألتين جديدتين من مسائل البرمجة الصحيحة بالقيود المتمثلة في الخطوة 5. مسألة واحدة متكونة من إضافة القيد (4.3) والمسألة الأخرى متكونة من إضافة القيد (4.4) وحل كل من هاتين المسألتين على انهما مسائل البرمجة الخطية باستخدام طريقة سمبلكس.إذا كانت :

1-كل المتغيرات $x_j , j \in I$ لها قيم صحيحة ممكنة فالمسألة (4.1) انتهت لقد حصلنا على الحل الأمثل و إلا اذهب الى 2:

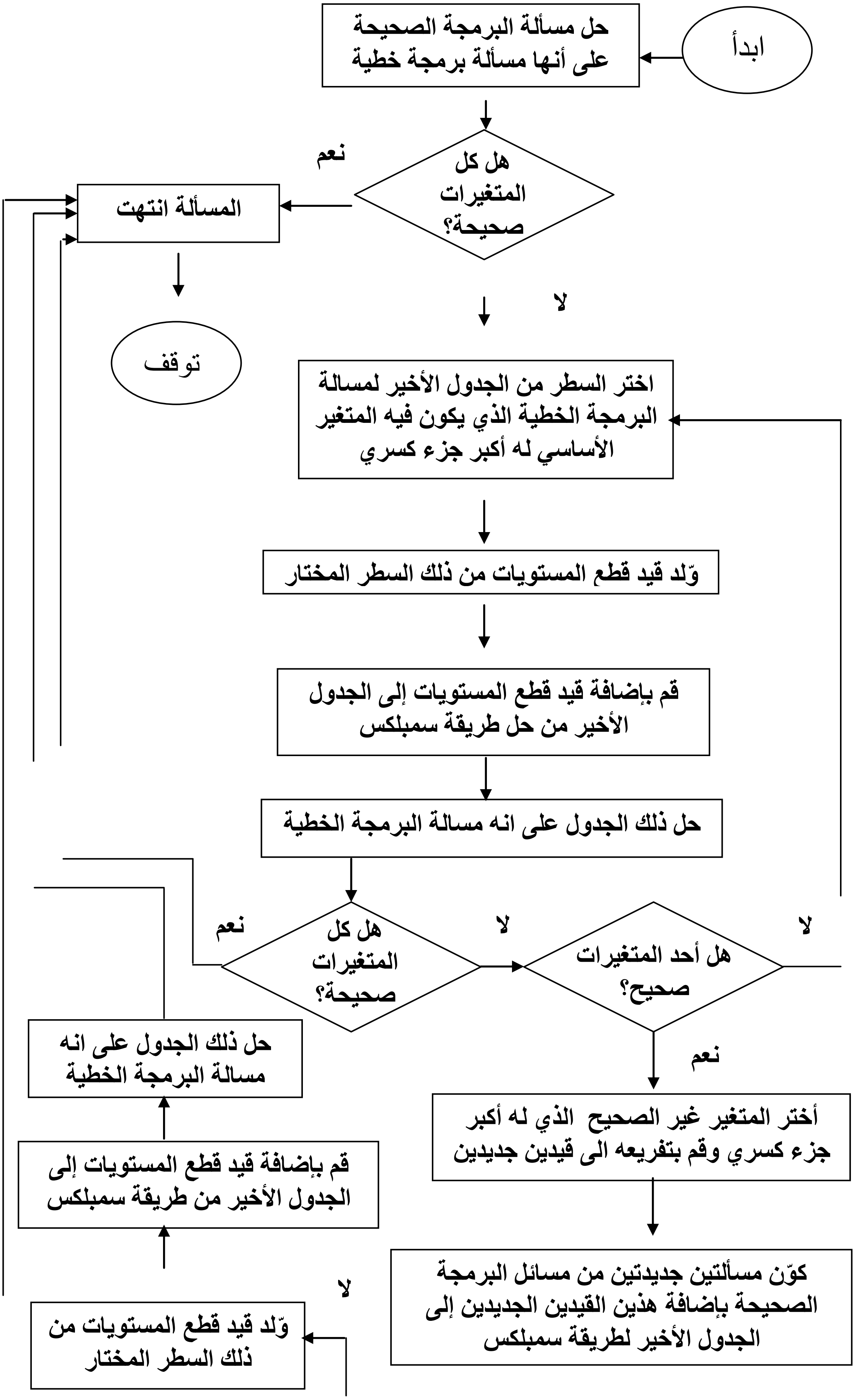
2-الحل غير ممكن أي خارج منطقة الحل عندها توقف وخذ عقدة أخرى وإلا اذهب الى 3:

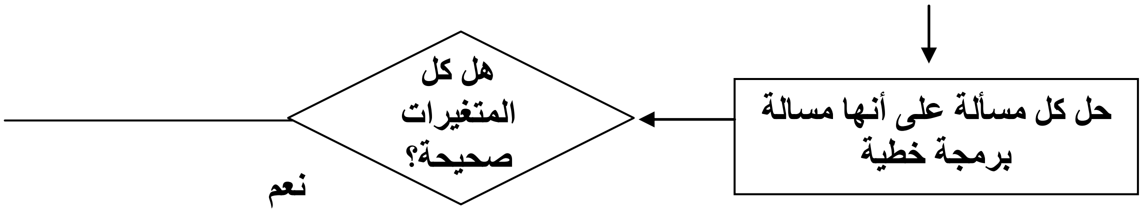
3–أحد المتغيرات $x_j, j \in I$ له قيمة صحيحة عندها ابدأ باستخدام طريقة قطع المستويات كما في الخطوة 3 أعلاه على المتغير غير الصحيح في كل من العقدتين الناتجتين من طريقة التفرعات والعقد عندها سوف نحصل على الحلّين الآتيين من كل عقدة:

1–الحل الأمثل الممكن(Optimal solution) للمسألة (4.1) .

2–الحل غير ممكن (Infeasible solution)عندها توقف.

[4-6] المخطط الانسيابي إلى الطريقة الثانية في القطع والتفرع والقطع:


ابدأ
حل مسألة البرمجة الصحيحة على أنها مسألة برمجة خطية
هل كل المتغيرات صحيحة؟
نعم
المسألة انتهت
توقف
لا
اختر السطر من الجدول الأخير لمسالة البرمجة الخطية الذي يكون فيه المتغير الأساسي له أكبر جزء كسري
وّلد قيد قطع المستويات من ذلك السطر المختار
قم بإضافة قيد قطع المستويات إلى الجدول الأخير من حل طريقة سمبلكس
حل ذلك الجدول على انه مسالة البرمجة الخطية
نعم
هل كل المتغيرات صحيحة؟
لا
هل أحد المتغيرات صحيح؟
لا
نعم
أختر المتغير غير الصحيح الذي له أكبر جزء كسري وقم بتفريعه الى قيدين جديدين
كوّن مسألتين جديدتين من مسائل البرمجة الصحيحة بإضافة هذين القيدين الجديدين إلى الجدول الأخير لطريقة سمبلكس
حل ذلك الجدول على انه مسالة البرمجة الخطية
قم بإضافة قيد قطع المستويات إلى الجدول الأخير من طريقة سمبلكس
لا
وّلد قيد قطع المستويات من ذلك السطر المختار


حل كل مسألة على أنـها مسالة برمجة خطية
هل كل المتغيرات صحيحة؟
نعم

[4-7]مثال: حل مسألة البرمجة الخطية الصحيحة المطلقة الآتية بطريقة القطع والتفرع والقطع:

$$\text{Maximize } z = 3x_1 + 4x_2$$

Subject to $2x_1 + x_2 \le 6$ المستقيم 1

$2x_1 + 3x_2 \le 9$ المستقيم 2

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \text{integral}$

الحل:

نقوم أولا بإضافة المتغيرات المنحلة x_3, x_4 إلى المسألة أعلاه كالأتي $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$ و $2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9$ والحل على أنها مسألة البرمجة الخطية متجاهلا الشروط الصحيحة على المتغيرين x_1, x_2 كما في <u>الخطوة 1</u> والحصول على الجدول الأخير من حل البرمجة الخطية الموضح في الجدول (1- 4) ومن هذا الجدول نحصل على الحل الأمثل الحقيقي(غير الصحيح) $x_1 = \frac{9}{4}, x_2 = \frac{3}{2}, z = \frac{51}{4}$.

سوف نختار السطر الثاني من الجدول أدناه لتكوين قيد قطع المستويات و بما أن المتغير الأساسي x_2 له أكبر جزء كسري والذي هو $\frac{1}{2}$ لذلك سيكون القاطع المتولد من هذا السطر هو افضل الكل.

الجدول (4-1):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	$\frac{9}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{-1}{4}$
x_2	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$
z	$\frac{51}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$

نستطيع أن نحصل على قيود قطع المستويات أخرى من السطر الأول و الثالث ولكن ربما لا تؤدي هذه القيود إلى الحل الأمثل أو ربما تأخذ المسألة عددا أكبر من التكرارات و الوقت للوصول إلى الحل النهائي.

الآن سوف نطبق <u>الخطوة 3</u> للخوارزمية على السطر الثاني من الجدول (1-4) كالأتي:

$$x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 + (\frac{-2}{2} + \frac{1}{2})x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{2}{2} + \frac{1}{2}$$

$$x_2 - x_3 - 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

وسوف تكون بالشكل :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \le 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(قيد القاطع 1)}$$

$$\frac{-1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \delta_1 = \frac{-1}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (4.1)$$

وفي الطريقة نفسها يمكن الحصول على القواطع من السطر الأول و الثالث من الجدول نفسه:

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \le 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(قيد القاطع 2)}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \le 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(قيد القاطع 3)}$$

على التوالي

ومن أي واحد من هذين الاثنين نحصل على:

$$\frac{-3}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 + \delta_1 = \frac{-1}{4} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4.2)$$

ملاحظة: نرى ان (قيد القاطع 2) و (قيد القاطع 3) متساويان ولهذا يمكننا اخذ أي واحد منهم.

لقد علمنا من البداية ان (قيد القاطع 1) هو افضل من (قيد القاطع 2) أو (قيد القاطع 3) ويمكننا برهان ذلك بطريقة أخرى:

من بداية الحل بعد إضافة المتغيرات المنحلة x_3, x_4 على القيود الأصلية للمسألة يمكننا الحصول على:

$$x_3 = 6 - 2x_1 - x_2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4.3)$$

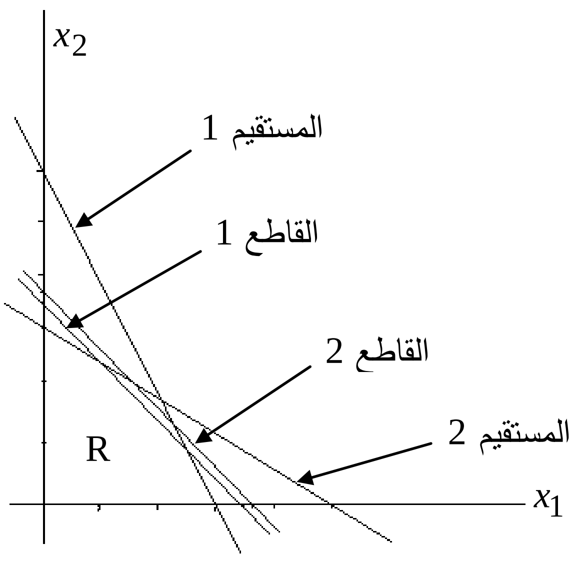
$$x_4 = 9 - 2x_1 - 3x_2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4.4)$$

الآن بتعويض (4.3) و (4.4) في (قيد القاطع 1) و (قيد القاطع 2) على التوالي سوف نحصل على:

$2x_1 + 2x_2 \le 7$ ....(القاطع 1)................

$3x_1 + 3x_2 \le 11$ ....(القاطع 2)................

وبرسم (القاطع 1) و (القاطع 2) :



الشكل 1-4

من (الشكل 1-4) نلاحظ أن (القاطع 1) يقطع منطقة الحل الممكن R اكثر من (القاطع 2) وهذا يبرهن أن (القاطع 1) هو أكفأ من (القاطع 2).

الآن بتطبيق الخطوة 4 بإضافة المعادلة (4.1) إلى الجدول (1-4) كالأتي:

الجدول (2-4):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3 ↓	x_4	δ_1
x_1	$\frac{9}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{-1}{4}$	0
x_2	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
z	$\frac{51}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	0
← δ_1	$\frac{-1}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	1

وباستخدام طريقة سمبلكس على الجدول أعلاه فنحصل على:

الجدول (3-4):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1
x_1	$\frac{3}{2}$	1	0	0	-1	$\frac{3}{2}$
x_2	2	0	1	0	1	-1
z	$\frac{25}{2}$	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$
x_3	1	0	0	1	1	-2

الآن ، من الجدول (3-4) نلاحظ أن المتغير x_1 مازالت قيمته غير صحيحة لذلك سوف نبدأ باستخدام طريقة التفرعات و العقد للعمل على تفرع المتغير x_1 إلى قيدين جديدين بوساطة الخطوة 5 كالأتي $x_1 \geq 2, x_1 \leq 1$ وإضافتهما إلى الجدول أعلاه (3-4) . لنختر هنا القيد $x_1 \leq 1$.الآن $x_1 + \delta_2 = 1$ و $x_1 = \frac{3}{2} + x_4 - \frac{3}{2}\delta_1$ من الجدول نفسه و بتعويضه نحصل على :

$$x_4 - \frac{3}{2}\delta_1 + \delta_2 = 1 - \frac{3}{2} = \frac{-1}{2} \qquad (4.5)$$

سنقوم بتطبيق الخطوة 5 بإضافة القيد (4.5) إلى الجدول (3-4) كالأتي:

الجدول (4-4):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1 ↓	δ_2
x_1	$\frac{3}{2}$	1	0	0	-1	$\frac{3}{2}$	0
x_2	2	0	1	0	1	-1	0
z	$\frac{25}{2}$	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0
x_3	1	0	0	1	1	-2	0
δ_2 ←	$\frac{-1}{2}$	0	0	0	1	$\frac{-3}{2}$	1

وباستخدام طريقة سمبلكس على الجدول السابق نحصل على:

الجدول (4-5):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1	δ_2
x_1	1	1	0	0	0	0	1
x_2	$\frac{7}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$
z	$\frac{37}{3}$	0	0	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
x_3	$\frac{5}{3}$	0	0	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{-4}{3}$
δ_1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{-2}{3}$	1	$\frac{-2}{3}$

من الجدول (4-5) أعلاه نجد أن المتغير $x_2 = \frac{7}{3}$ مازالت قيمته غير صحيحة و $x_1 = 1$ قيمته صحيحة، لذلك الشرط الثالث من الخطوة 6 من الخوارزمية تحقق ، وحسب الخطوة 3 سوف نبدأ طريقة قطع المستويات بتوليد قيد قطع المستويات من السطر الثاني من الجدول نفسه كالأتي:

$$x_2 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}\delta_2 = \frac{7}{3} \longrightarrow x_2 + \frac{1}{3}x_4 + (\frac{-3}{3} + \frac{1}{3})\delta_2 = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} \longrightarrow$$

$$x_2 - \delta_2 - 2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}\delta_2 \le 0$$

بإضافة المتغير المنحل $\frac{-1}{3}x_4 - \frac{1}{3}\delta_2 + \delta_3 = -\frac{1}{3}$ .... (4.6)

بعد التعويض عن قيمة x_4 من بداية الحل نحصل على القاطع الثالث:

$\frac{2}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}\delta_2 \le \frac{8}{3}$ ....(القاطع 3)

بإضافة القيد (4.6) الى الجدول (4-5) كالأتي:

الجدول (4-6):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1	δ_2 ↓	δ_3
x_1	1	1	0	0	0	0	1	0
x_2	$\frac{7}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$	0
z	$\frac{37}{3}$	0	0	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
x_3	$\frac{5}{3}$	0	0	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{-4}{3}$	0
δ_1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{-2}{3}$	1	$\frac{-2}{3}$	0
← δ_3	$\frac{-1}{3}$	0	0	0	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	1

باستخدام طريقة سمبلكس على الجدول أعلاه فنحصل على:

الجدول (4-7):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1	δ_2	δ_3
x_1	0	1	0	0	-1	0	0	3
x_2	3	0	1	0	1	0	0	-2
z	12	0	0	0	1	0	0	1
x_3	3	0	0	1	1	0	0	-4
δ_1	1	0	0	0	0	1	0	-2
δ_2	1	0	0	0	1	0	1	-3

ومن هذا الجدول حصلنا على الحل الأمثل للمسألة بطريقة القطع والتفرع والقطع و

الذي هو $x_1 = 0, x_2 = 3, z = 12$

وهذا الحل كان على قيد التفرع $x_1 \leq 1$ سنقوم الان بحل المسألة على القيد الأخر

$x_1 \geq 2$ ، بإضافة المتغير المنحل $x_1 - \delta_2 = 2$ وبما ان $x_1 = \frac{3}{2} + x_4 - \frac{3}{2}\delta_1$ من

الجدول (3-4) وبالتعويض نحصل على :

$$x_4 - \frac{3}{2}\delta_1 - \delta_2 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{.........................(4.7)}$$

وبإضافة المعادلة (4.7) الى الجدول (3-4) كالأتي:

الجدول (4-8):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1	δ_2
x_1	$\frac{3}{2}$	1	0	0	-1	$\frac{3}{2}$	0
x_2	2	0	1	0	1	-1	0
z	$\frac{25}{2}$	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0
x_3	1	0	0	1	1	-2	0
δ_2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	1	$\frac{-3}{2}$	-1

وباستخدام طريقة سمبلكس على الجدول أعلاه فنحصل على:

الجدول (4-9):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1	δ_2
x_1	2	1	0	0	0	0	-1
x_2	$\frac{5}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
z	$\frac{38}{3}$	0	0	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$
x_3	$\frac{1}{3}$	0	0	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
δ_1	$\frac{-1}{3}$	0	0	0	$\frac{-2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$

ومن الجدول (4-9) نلاحظ أن المتغير $x_2=\frac{5}{3}$ مازالت قيمته غير صحيحة و $x_1=2$ قيمته صحيحة لذلك الشرط الثالث من الخطوة 6 تحقق وبذلك سنبدأ طريقة قطع المستويات، وحسب الخطوة 3 من الخوارزمية سنولد قيد قطع المستويات من السطر الثاني من الجدول نفسه كالأتي:

$$x_2+\frac{1}{3}x_4+\frac{2}{3}\delta_2=\frac{5}{3} \longrightarrow x_2+\frac{1}{3}x_4+\frac{2}{3}\delta_2=\frac{3}{3}+\frac{2}{3} \longrightarrow$$

$$x_2-1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}x_4-\frac{2}{3}\delta_2\le 0 \longrightarrow -\frac{1}{3}x_4-\frac{2}{3}\delta_2+\delta_3=-\frac{2}{3} \text{———} (4.8)$$

وبعد التعويض عن قيمة x_4 من بداية الحل في المعادلة (4 . 8) سنحصل على:

$$\frac{2}{3}x_1+x_2-\frac{2}{3}\delta_2\le\frac{7}{3}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(القاطع 3)}$$

وبإضافة المعادلة (4.8) الى الجدول (4-9) كالأتي:

الجدول (4-10):

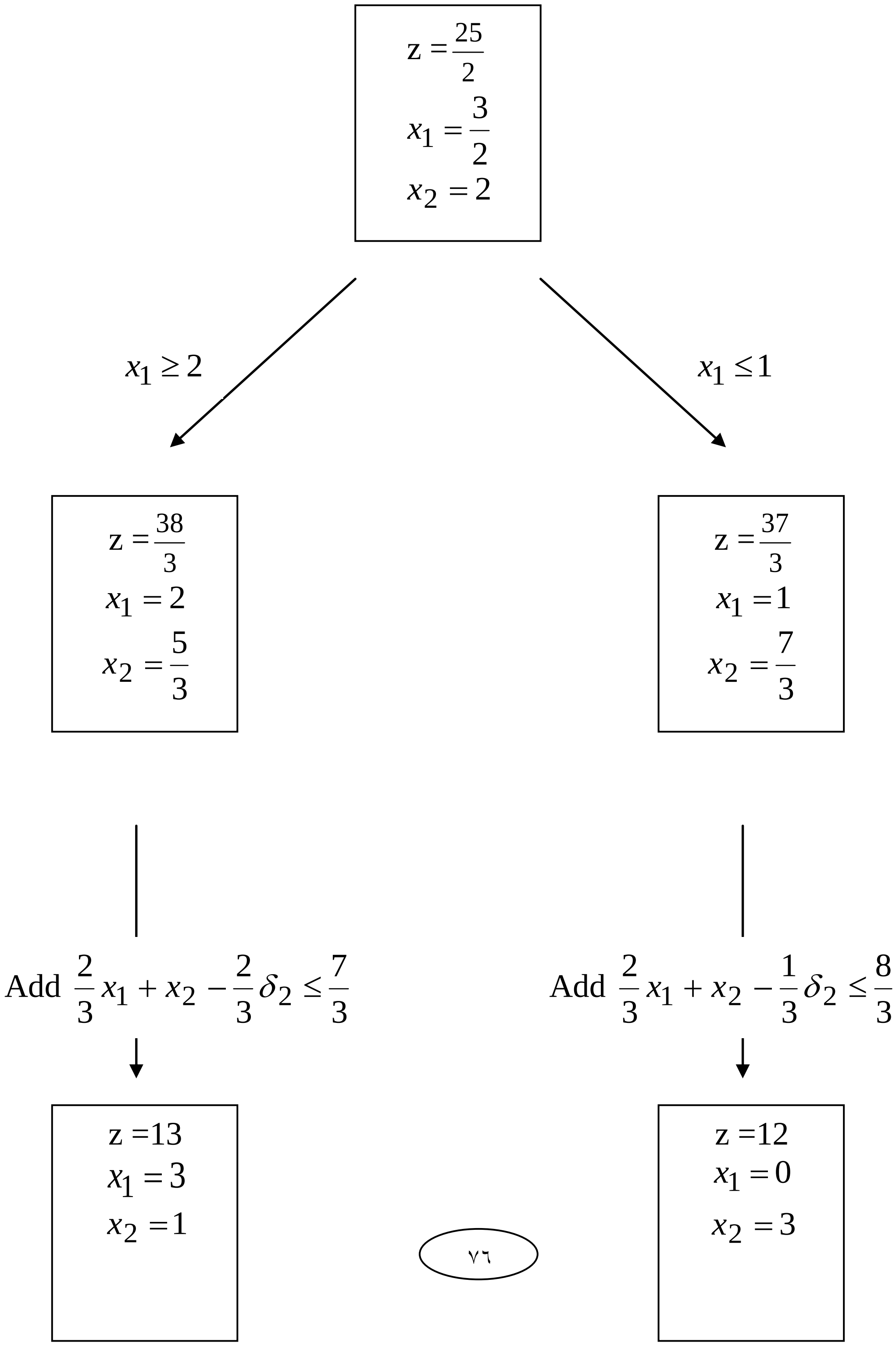
B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1	δ_2	δ_3
x_1	2	1	0	0	0	0	-1	0
x_2	$\frac{5}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0
z	$\frac{38}{3}$	0	0	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	0
x_3	$\frac{1}{3}$	0	0	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	0
δ_1	$\frac{-1}{3}$	0	0	0	$\frac{-2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0
δ_3	$\frac{-2}{3}$	0	0	0	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$	1

وباستخدام طريقة سمبلكس على الجدول أعلاه فنحصل على:

الجدول (4-11):

B.V.	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1	δ_2	δ_3
x_1	3	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{-3}{2}$
x_2	1	0	1	0	0	0	0	1
z	13	0	0	0	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$
x_3	-1	0	0	1	-1	0	0	2
δ_1	-1	0	0	0	-1	1	0	1
δ_2	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{-3}{2}$

من الجدول (4-11) حصلنا على صحيح أخر $x_1 = 3, x_2 = 1, z = 13$ ولكن هذا الحل هو حل غير ممكن (أي حل خارج منطقة الحل R) .شجرة الحل الآتية توضح الحل بطريقة القطع والتفرع والقطع:



العقدة المنتهية
الحل الأمثل

الحل غير ممكن
خارج منطقة الحل

[5-1]النتائج العددية:

في هذه الرسالة تم اختيار عشرة مسائل[6] من البرمجة الخطية الصحيحة المطلقة وحلها بالحاسوب لاجل ملاحظة مدى دقة النتائج ونجاح طريقة الحل الجديدة وهذه المسائل هي كالآتي:

Q1	Max $Z = 5x_1 + 2x_2$ Subject to $5x_1 + 4x_2 \le 21$ $x_1, x_2 \ge 0,$ integers	Q6	Max $Z = 3x_1 + x_2$ Subject to $x_1 + 2x_2 \le 8$ $3x_1 - 4x_2 \le 12$ $x_1, x_2 \ge 0,$ integers
Q2	Max $Z = 10x_1 + x_2$ Subject to $2x_1 + 5x_2 \le 11$ $x_1, x_2 \ge 0,$ integers	Q7	Max $Z = 4x_1 + 3x_2$ Subject to $2x_1 + x_2 \le 11$ $-x_1 + 2x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0,$ integers
Q3	Max $Z = 4x_1 + 3x_2$ Subject to $3x_1 + 2x_2 \le 18$ $x_1, x_2 \ge 0,$ integers	Q8	Max $Z = 6x_1 + 7x_2$ Subject to $x_1 + 2x_2 \le 8$ $x_1 - x_2 \le 4$ $2x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0,$ integers
Q4	Max $Z = 120x_1 + 80x_2$ Subject to $2x_1 + x_2 \le 6$ $7x_1 + 8x_2 \le 28$ $x_1, x_2 \ge 0,$ integers	Q9	Max $Z = x_1 + 9x_2 + x_3$ Subject to $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 9$ $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 15$ integers $x_1, x_2, x_3 \ge 0,$
Q5	Max $Z = 5x_1 + 8x_2$ Subject to $x_1 + x_2 \le 6$ $5x_1 + 9x_2 \le 45$ $x_1, x_2 \ge 0,$ integers	Q10	Max $Z = 2x_1 + x_2 - 3x_3$ Subject to $x_1 + 2x_2 - x_3 \le 5$ $-x_1 + x_2 + 3x_3 \le -2$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0,$ integers

تم حل هذه المسائل بوساطة عمل وتحسين برامجيات خاصة[9] في الحاسوب وذلك بلغة فورتران حيث تم الحصول على برنامجين على كل من طريقة التفرعات و العقد Branch and Bound و طريقة قطع المستويات Cutting planes وتم الربط بينهما بجعل برنامج الـ B. B برنامجا فرعيا (subroutine program) من برنامج الـC.P. فعند تنفيذ البرنامج وذلك بإدخال كل من البيانات الآتية:

1) M1 عدد صفوف المصفوفة A.
2) Kعدد أعمدة المصفوفة A.
3) NLET عدد القيود ≤.
4) NGET عدد القيود ≥.
5) NET عدد القيود =.
6) ATAB الرقم المضاف الى دالة الهدف.

7) CODE= { 0 إذا كان ≤ ، 1 إذا كان ≥ ، 2 إذا كان = }

8) B قيم القيود.
9) C معاملات دالة الهدف.

سيبدأ أولا بإيجاد الحل الأمثل للمسألة على أساس أنها مسالة البرمجة الخطية فيكون الحل حقيقيا ثم بعد ذلك سيكمل الحل بوساطة برنامج طريقة قطع المستويات .C.P فينتج عدة تكرارات الى حين الوصول الى أمر واحد من اثنين:

* إما الحل الأمثل وبذلك سيتوقف البرنامج.

* أو نحصل على إحدى قيم المتغيرات صحيحة والأخرى حقيقية وبذلك ستكون بداية تنفيذ البرنامج الفرعي والذي هو برنامج طريقة التفرعات والعقد.B.B حيث تظهر العبارة

*** **WE NOW WILL USE THE BRANCH AND BOUND METHOD** *** على الشاشة

،فيعمل على تفرع القيمة الحقيقية الى حين الوصول الى الحل الأمثل.

والنتائج العددية لهذه المسائل موجودة في الجدول

الجدول (1-5):

مقارنة بين الطرائق الثلاث على مجموعة المسائل العشر

Examples		Branch and Bound		Cutting Planes		NEW	
		NOI	CPU (sec)	NOI	CPU (sec)	NOI	CPU (sec)
Q1	Max $Z = 5x_1 + 2x_2$ Subject to $5x_1 + 4x_2 \le 21$ $x_1, x_2 \ge 0,$ integers	**4**	**0.24**	**3**	**0.26**	**3**	**0.46**
Q2	Max $Z = 10x_1 + x_2$ Subject to $2x_1 + 5x_2 \le 11$ $x_1, x_2 \ge 0,$ integers	**4**	**0.22**	**2**	**0.38**	**3**	**0.29**
Q3	Max $Z = 4x_1 + 3x_2$ Subject to $3x_1 + 2x_2 \le 18$ $x_1, x_2 \ge 0,$ integers	**2**	**0.11**	**1**	**0.32**	**1**	**0.20**
Q4	Max $Z = 120x_1 + 80x_2$ Subject to $2x_1 + x_2 \le 6$ $7x_1 + 8x_2 \le 28$ $x_1, x_2 \ge 0,$ integers	**7**	**0.33**	**4**	**0.90**	**5**	**0.70**
Q5	Max $Z = 5x_1 + 8x_2$ Subject to $x_1 + x_2 \le 6$ $5x_1 + 9x_2 \le 45$ $x_1, x_2 \ge 0,$ integers	**8**	**0.37**	**3**	**0.87**	**3**	**0.65**

Q6	Max $Z = 3x_1 + x_2$ Subject to $x_1 + 2x_2 \le 8$ $3x_1 - 4x_2 \le 12$ $x_1, x_2 \ge 0,$ integers	**9**	**0.49**	**4**	**1.03**	**5**	**0.74**
Q7	Max $Z = 4x_1 + 3x_2$ Subject to $2x_1 + x_2 \le 11$ $-x_1 + 2x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0,$ integers	**7**	**0.31**	**4**	**0.98**	**6**	**0.77**
Q8	Max $Z = 6x_1 + 7x_2$ Subject to $x_1 + 2x_2 \le 8$ $x_1 - x_2 \le 4$ $2x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0,$ integers	**9**	**0.72**	**2**	**1.07**	**3**	**0.84**
Q9	Max $Z = x_1 + 9x_2 + x_3$ Subject to $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 9$ $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 15$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0,$ integers	**5**	**0.38**	**2**	**0.85**	**3**	**0.56**
Q10	Max $Z = 2x_1 + x_2 - 3x_3$ Subject to $x_1 + 2x_2 - x_3 \le 5$ $-x_1 + x_2 + 3x_3 \le -2$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0,$ integers	**2**	**0.31**	**1**	**0.66**	**1**	**0.49**
	Total	**57**	**3.48**	**26**	**7.68**	**33**	**5.70**

Performance percentage of improving the new algorithm compared with the two other standards

Tools	**NEW**	**Branch and Bound**	**Cutting Planes**
NOI	**100%**	**172.72%**	**78.79%**
CPU	**100%**	**61.05%**	**134.73%**

من الجدول أعلاه نلاحظ وبكل وضوح أن عدد التكرارات NOI للطريقة الجديدة Cut & Branch يقع ما بين عدد تكرارات كل من Branch & Bound و Cutting Plane علما أن: (NOI (B.B.)≥NOI (C.P.)) دائما وكذلك الوقت المستغرق في التنفيذ CPU لـ Cut & Branch يقع أيضا ما بين الوقت المستغرق لكل من الطريقتين السابقتين علما أن:

(CPU (B.B.)≤ CPU (C.P.)) دائما، وهذا يدل على أن برنامج Cut & Branch هو الأفضل من بين البرنامجين السابقين وبذلك يتم الاختيار.

[5-2]الاستنتاجات:

<u>إيجابيات طريقة قطع المستويات:</u>

1) عدد التكرارات NOI قليل.

2) يتم الحصول على الحل بوساطة القواطع التي يمكن استخراجها من الجدول الأخير لحل مسألة البرمجة الخطية حيث يتم قطع منطقة الحل الى حين الحصول على الحل الأمثل بالاعتماد على طريقة سمبلكس.

<u>إيجابيات طريقة التفرعات و العقد:</u>

1) الوقت المستغرق في الحلCPU قليل.

2) يتم الحصول على الحل بوساطة التجزئة وذلك بتجزئة(تفرع) المتغيرات ذات القيم الحقيقية من الجدول الأخير لحل مسألة البرمجة الخطية ونستمر بالتجزئة الى حين الحصول على الحل الأمثل بالاعتماد على طريقة سمبلكس.

3) طريقة التفرعات و العقد طريقة مضمونة الوصول إلى الهدف.

<u>سلبيات طريقة قطع المستويات:</u>

1) الوقت المستغرق في الحلCPU كثير.

2) في بعض الأحيان لا نحصل على الحل وخاصة حين البدء بالحل بأحد القواطع غير الكفوءة وبذلك تكون طريقة قطع المستويات غير مضمونة الوصول إلى الهدف.

3) عدد القيود المولدة في طريقة قطع المستويات ممكن أن يكون كبيرا.

<u>سلبيات طريقة التفرعات و العقد:</u>

1) عدد التكرارات NOI في الحل كبير وخاصة عند البدء بتفرع قيمة غير كفوءة.

2) يجب الاستمرار بالتفرع حتى ولو حصلنا على الحل الى حين الحصول على عقد مكررة و خارجة عن المنطقة.

3) عدد العقد المولدة في طريقة التفرعات و العقد ممكن أن يكون عددا كبيرا.

الأسباب التي أدت الى الربط ما بين طريقة قطع المستويات و طريقة التفرعات و العقد هي للتغلب على المساوئ من كلا الطريقتين وخاصة عدد التكرارات الكبير و الوقت

الطويل المستغرق في الحل و الحصول على نتائج تقع ما بين الاثنين حيث أخذت الطريقة الجديدة (طريقة القطع والتفرع)الصفات الجيدة من كلا الطريقتين حسب المقارنة الآتية:

عدد تكرارات طريقة التفرعات والعقد NOI of Branch and Bound	$\leq$	عدد تكرارات طريقة القطع والتفرع NOI of Cut and Branch	$\leq$	عدد تكرارات طريقة قطع المستويات NOI of Cutting Planes
الوقت المستغرق لطريقة التفرعات والعقد CPU of Branch Bound	$\geq$	الوقت المستغرق لطريقة القطع والتفرع CPU of Cut and Branch	$\geq$	الوقت المستغرق لطريقة قطع المستويات CPU of Cutting Planes

لو خيرنا في حل مسألة برمجة صحيحة بأحد الطريقتين طريقة قطع المستويات أو طريقة التفرعات و العقد فسيكون الاختيار بكل تأكيد هو طريقة التفرعات و العقد لأنها كما قلنا مضمونة الوصول الى الهدف فلذلك عملنا بطريقة القطع و التفرع على تحسين طريقة قطع المستويات بطريقة التفرعات و العقد فحصلنا على طريقة جديدة لحل مسائل البرمجة الصحيحة(المطلقة و المختلطة) على السواء و لكن هنا فقط استخدمناها على أن تكون جميع المتغيرات صحيحة فكانت النتائج جيدة و مرضية فضلا عن أن التركيب فيما بين الطريقتين سيجعل من طريقة قطع المستويات طريقة عملية جدا..

من هذا العمل نستنتج انه يمكن تركيب طريقتين للحصول على طريقة ثالثة ذات نتائج أفضل، فمن الممكن ربط طريقة قطع المستويات و طريقة التفرعات و العقد أكثر من مرة كما لاحظنا في الفصل الرابع حيث تم الربط مرة أخرى بقطع المستويات أي حصلنا

على(قطع و تفرع و قطع) فانتهى الناتج إلى حلين ،حل خارج عن المنطقة(غير ممكن) (Infeasible solution) وحل أمثل للمسألة(Optimal solution) فأصبح هذا التركيب الثلاثي الجديد تركيباً جيد جداً حيث أخذ الصفات الجيدة ما بين الطريقة الجديدة(القطع و التفرع) و طريقة قطع المستويات وهذا يفتح مستقبلا مجالا جديدا وواسعا في مسائل البرمجة الخطية الصحيحة(المطلقة و المختلطة) وإيجاد أفضل الحلول لها.

[1] Bussieck, M. R. and Pruessner, A. (2003): *ILP introductory Notes*, [http://www.strathcona.bham.ac.uk/pdfs].

[2] Chinneck, J. W. (2003): *Practical optimization: A Gentle Introduction*, Chapter12, pp.2-3, [http://www.sce.carleton.ca/faculty/chinneck/po.html].

[3] Cooper, L. and Cooper, M. W. (1981): *Introduction to dynamic programming*, Pergamon Press, USA, Chapter 6, pp.86-154.

[4] Eudoxus System Ltd. (2003): *Practical integer programming*, Perth House Leighton Buzzard LU7 2RN UK, [http://www.eudoxus.com/lect5.pdf.].

[5] Fan, E. (2002): *Global optimization of Lennard-Jones atomic clusters*. McMaster University, Ontario, CANADA, Chapter 2, pp.24-25.

[6] Gomory, R. E. (1973): *An all-integer programming algorithm*, Rand report, R.M. 25797, New York, Chapter 3, pp.46-66.

[7] Grafinkel, R. S. and Nemhauser, G. L. (2003): *Integer programming*, MATH3902 operation researches II, Chapter 1, pp.1-5.

[8] Kolman, B. and Beck, R. E. (1980): *Elementary linear programming with applications*. Academic Press, New York, USA, Chapter 4, pp. 258-266.

[9] Kuester, J. L. and Mize, J. H. (1970): *Optimization techniques with FORTRAN*, MC GRAW HILL, Inc., USA. Chapter 2, pp.66-90.

[10] Letchford, A. N. and Lodi, A. (2001): *Primal cutting plane algorithm revisited*. Lancaster University, LA1 4YW, UK, pp. 1-11.

[11] Salkin, H. M. (1975): *Integer programming*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass, Chapter 2, p.34.

[12] Taha, H. A. (1979): *Operations research an introduction*, Macmillan, New York, USA. Chapter 8, p.258.

[13] Thie, P. R. (1979): *An introduction to linear programming and game theory*, John Wiley Press, New York, USA, Chapter 6, p.187.

[14] Villalobos, J. R.; Hogg, G. L. and Griffin, P. M. (2002): *Introduction to integer programming*. Arizona state University and George institute of technology, pp.4-7.

[15] Wampler, J. F. and Newman, S. E. (1996): *Integer Programming*, the College Mathematics Journal. Vol. 27, No. 2, pp. 95-100.

[16] Williams, H. P. (1978): *Model building in mathematical programming,* John Wiley, New York, pp.138-147.

[17] Wright, S. J. (1999): *Optimization software packages*, Argonne National Laboratory. pp.4-5.

Abstract:

This work deals with a new method for solving Integer Linear Programming Problems depending on a previous methods for solving these problems such that Branch and Bound method and Cutting Planes method where this new method is a combination between them and we called it Cut and Branch method, The reasons which led to this combination between Cutting Planes method and Branch and Bound method are to defeat from the drawbacks of both methods and especially the big number of iterations and the long time for the solving and getting of a results between the results of these methods where the Cut and Branch method took the good properties from the both methods.

And this work deals with solving a one problem of Integer Linear Programming Problems by Branch and Bound method and Cutting Planes method and the new method, and we made a programs on the computer for solving ten problems of Integer Linear Programming Problems by these methods then we got a good results and by that, the new method (Cut and Branch) became a good method for solving Integer Linear Programming Problems.

The combination method which we doing in this thesis opened a big and wide field in solving Integer Linear Programming Problems and finding the best solutions for them where we did the combination method again between the new method (Cut and Branch) and the Cutting Planes method then we got a new method with a very good results and solutions.

A Hybrid method for combined Cutting Planes and Branch and Bound for Integer Programming Problems

A Thesis Presented

To

The Council of the College of

Computers and Mathematical sciences,

University of Mosul

In partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of

Master of Science in Mathematics

By

Nawar N. A. Fatohi

Supervised by

Prof. Dr. Abbas Younis AL-Bayati

1426 A.H. 2005 A.D.